Title: Bisymulacje modeli Kripkego dla teorii intuicjonistycznych pierwszego rzędu

Author: Małgorzata Kruszelnicka

Citation style: Kruszelnicka Małgorzata. (2014). Bisymulacje modeli Kripkego dla teorii intuicjonistycznych pierwszego rzędu. Praca doktorska. Katowice : Uniwersytet Śląski

Uniwersytet Śląski w Katowicach
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii
Instytut Matematyki

Bisymulacje modeli Kripkego dla teorii intuicjonistycznych pierwszego rzędu

Autor:
Małgorzata Kruszelnicka

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
dr. hab. Tomasza Połacika

Pragnę złożyć serdeczne podziękowania mojemu Promotorowi — Panu dr. hab. Tomaszowi Połacikowi za całą przekazaną mi przez te lata wiedzę, duże zaangażowanie, wsparcie oraz cenne uwagi i wskazówki udzielane podczas pisania niniejszej pracy.

Dziękuję również Rodzicom za cierpliwość, wyrozumiałość i wsparcie duchowe.

Spis treści

Wstęp

W ostatniej ćwierci XIX wieku w filozofii i podstawach matematyki rozwinęły się pierwsze prądy konstruktywistyczne, będące reakcją na gwałtowny rozwój nader abstrakcyjnych pojęć i technik w matematyce, szczególnie teorii mnogości Cantora. Za konstruktywistyczne uznawano te kierunki, które ograniczały się do rozważań nad obiektami konstruowalnymi i operacjami konstruktywnymi. Szeroki ich przegląd przedstawiony został w [9] oraz [15].

Jednym z najbardziej rozwiniętych nurtów konstruktywistycznych jest intuicjonizm. Jego współczesna doktryna swego kształtu nabrała w latach 1907–1930. Twórcą intuicjonizmu był holenderski matematyk Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966). Filozoficzne podstawy tego kierunku przedłożył on w swej rozprawie doktorskiej z 1907 roku. Następnie idee Brouwera rozwijane były przez jego uczniów Arenda Heytinga (1898–1980), Anne Sjerp Troelstrę (ur.1939) i wielu innych.

Idee charakterystyczne dla intuicjonizmu można dostrzec już u Arystotelesa i Euklidesa. Za prekursorów nurtu uważano tych myślicieli, którzy utrzymywali, iż matematyka została wyposażona w określoną treść, a umysł ludzki bezpośrednio ujmuje przedmioty matematyczne formułując o nich sądy syntetyczne *a priori*. Dlatego też intuicjoniści chętnie powoływali się na Kanta. Pierwszy jasno sprecyzowany manifest matematyki konstruktywnej wydał w roku 1887 Leopold Kronecker (1823–1891), który w swej pracy „Über den Zahlbegriff" przedstawił projekt „arytmetyzacji" algebry i analizy. Kolejny etap w rozwoju intuicjonizmu wywołała dyskusja dotycząca dowodu Ernsta Zermela twierdzenia o dobrym uporządkowaniu. Zastosowany w dowodzie aksjomat wyboru wywołał rozmaite obiekcje grupy matematyków francuskich zwanych francuskimi semi-intuicjonistami. Głównymi przedstawicielami tej grupy byli Baire, Borel, Labesgue oraz Poincaré. Francuscy semi-intuicjoniści nie zaproponowali żadnej zwartej doktryny filozoficznej, ich przemyślenia dotyczyły przede wszystkim roli i miejsca aksjomatu wyboru.

U narodzin idei intuicjonistycznych lażała próba eliminacji sprzeczności w matematyce. Wątpliwości budziło podejście Cantora do teorii zbiorów, przede wszystkim jego postulat, iż każda kolekcja obiektów jest zbiorem.

Stanowisko takie zrodziło wiele paradoksów. Antynomia wskazana w 1901 roku przez Bertranda Russella zmusiła wielu matematyków do rewizji swych poglądów na teorię mnogości. Zaproponowany przez Ernsta Zermelo system aksjomatów wykluczył paradoksy i sprawił, iż “naiwna” teoria mnogości została ostatecznie porzucona.

Intuicjoniści zdecydowanie przeciwstawili się platonizmowi, zgodnie z którym obiekty matematyczne istnieją niezależnie od czasu, przestrzeni i, przede wszystkim, podmiotu poznającego. Przeciwnie, matematyka jest wytworem ludzkiego umysłu, a obiekty i prawdy matematyczne nie są odkrywane, lecz konstruowane przez myśl. Wszelkie obiekty matematyczne są konstrukcjami myślowymi *idealnego matematyka*. W konsekwencji odrzucili intuicjoniści metodę aksjomatyczną w matematyce. Mianowicie, nie można jedynie postulować istnienia obiektów matematycznych, lecz należy je najpierw skonstruować. Dlatego też odrzucono wszelkie dowody niekonstruktywne tez egzystencjalnych, to znaczy dowody nie wskazujące konstrukcji postulowanych obiektów. Dla przykładu rozumowań niekonstruktywnych rozważmy następujące stwierdzenie.

Istnieją takie liczby niewymierne a, b, że a^b jest liczbą wymierną.

Zgodnie z rozumowaniem klasycznym, jeśli $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną, to przyjmujemy $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$. Natomiast gdy $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną, możemy wziąć $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$. Niestety, powyższe rozumowanie, mimo swej prostoty i elegancji, nie przedstawia konstrukcji żądanych liczb, nadal nie wiemy jakie liczby spełniają wskazany warunek. Jednak powołując się na twierdzenie Gelfonda konstruktywny dowód powyższego stwierdzenia jest możliwy.

W sensie intuicjonistycznym, stwierdzenie jest *prawdziwe*, gdy posiadamy jego dowód, oraz *fałszywe*, gdy założenie o jego prawdziwości prowadzi do sprzeczności. Prawdziwość wyrażeń bardziej złożonych opisuje interpretacja spójników logicznych i kwantyfikatorów zwana interpretacją BHK (od nazwisk Brouwera, Heytinga i Kołmogorova). Oparta jest ona na pojęciu *dowodu*, przy czym pojęcie dowodu zdania złożonego dane jest indukcyjnie względem budowy formuły. Rozważane są więc następujące interpretacje.

- Dowód formuły $\varphi \wedge \psi$ polega na podaniu dowodu formuły φ i dowodu formuły ψ.

- Dowód formuły $\varphi \vee \psi$ polega na wskazaniu jednego ze składników φ, ψ i podaniu dowodu dla tego składnika.

- Dowód formuły $\varphi \to \psi$ to konstrukcja (funkcja), która każdy dowód formuły φ przekształca w dowód formuły ψ.

- Absurd $\perp$ (sprzeczność) nie posiada dowodu. Dowód formuły $\neg\varphi$ to konstrukcja, która każdy domniemany dowód formuły φ przekształca w absurd.
- Dowód dla $\forall_x \varphi(x)$ to funkcja, która dowodowi elementu d z rozważanej dziedziny D przyporządkowuje dowód dla $\varphi(d)$.
- Dowód dla $\exists_x \varphi(x)$ polega na wskazaniu dowodu dla pewnego elementu d z rozważanej dziedziny D, oraz podaniu dowodu dla $\varphi(d)$.

Tezy Brouwera, stanowiące sedno doktryny intuicjonistycznej, doprowadziły do wniosku o konieczności rekonstrukcji matematyki. W roku 1908 przedstawił on koncepcję oraz pierwszy tzw. *słaby kontrprzykład*. Był to rodzaj rozumowania, celem którego było pokazać, iż pewne klasycznie akceptowalne stwierdzenia są nieakceptowalne z konstruktywistycznego punktu widzenia.

Zasadniczym problemem była kwestia zbudowania systemu logiki opartego na filozoficznych tezach intuicjonizmu. Interpretacja BHK, odwołująca się do pojęcia dowodu (konstrukcji), ma jedynie charakter nieformalny. Jej implementacją jest natomiast system naturalnej dedukcji, w szczególności, ważne dla teorii dowodu logiki intuicjonistycznej, rachunki sekwentów zaproponowane przez Gerharda Gentzena w roku 1935 ([2]).

Pierwszy w pełni sformalizowany system aksjomatyczny rachunku intuicjonistycznego przedstawił w roku 1930 Arend Heyting ([4]). Koncepcja eliminacji dowodów niekonstruktywnych poprowadziła do odrzucenia logiki klasycznej, w której każde poprawnie zbudowane wyrażenie orzekające o własnościach obiektów matematycznych jest prawdziwe bądź fałszywe. Podważono przede wszystkim Prawo Wyłączonego Środka (*tertium non datur*) $\varphi \vee \neg\varphi$ oraz Prawo Podwójnego Przeczenia $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$. Istotnie, akceptacja Prawa Wyłączonego Środka z punktu widzenia interpretacji BHK oznaczałaby, iż dla każdego wyrażenia φ potrafimy wskazać dowód dla φ bądź dowód dla $\neg\varphi$. Jednak przyjmując za φ stwierdzenie: *istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych bliźniaczych*, widzimy, iż jest to niemożliwe.

W procesie formalizacji logiki intuicjonistycznej sformułowano również różnego rodzaju semantyki. Wspomnieć należy tutaj o interpretacji topologicznej, którą w roku 1938 przedstawił Albert Tarski. Szczególną uwagę poświęcimy wprowadzonym w roku 1965 modelom Kripkego. Pierwotnym zamysłem modelu jest imitacja aktywności umysłu *Idealnego Matematyka*, który w sposób konstruktywistyczny samodzielnie odkrywa matematykę. Wyidealizowany matematyk, zwany także przez Brouwera *obiektem tworzącym*, zaangażowany jest w budowę obiektów matematycznych oraz konstrukcję dowodów. Proces ten rozłożony w czasie pozwala Idealnemu Matematykowi w każdej chwili tworzyć nowe elementy i jednocześnie dostrzegać podstawowe fakty prawdziwe dla rozważanego uniwersum. Przechodząc z jednego momentu w czasie do następnego, matematyk posiada pełną swobodę działania. W każdym momencie możliwych jest wiele przyszłych etapów, więc obraz jego ewentualnej działalności wygląda jak zbiór częściowo uporządkowany (a dokładniej jak drzewo). Etapy te zwane są *światami możliwymi*.

Na bazie zasad intuicjonistycznych Brouwer i jego uczniowie dokonali rekonstrukcji części matematyki. Szczególne znaczenie dla doktryny intuicjonistycznej miały prace Arenda Haytinga i jego wysiłki prowadzące do wyjaśnienia idei Brouwera i ich popularyzacji. Zainteresowanie intuicjonizmem następnych pokoleń badaczy dotyczyło głównie zagadnień matematycznych, a nie programu rekonstrukcji matematyki. Intuicjonizm przyczynił się niewątpliwe, i nadal przyczynia, do precyzowania podstaw rozmaitych gałęzi matematyki i informatyki teoretycznej.

Badania przedstawione w niniejszej rozprawie poświęcone będą semantyce Kripkego. Nasza uwaga skupiona będzie na zagadnieniu logicznej równoważności modeli. Pojęcie to wywodzi się z klasycznej teorii modeli, choć obecnie stanowi obiekt badań wielu innych systemów logicznych.

Mając dane dwie struktury $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ pojawia się pytanie czy struktury te spełniają te same zbiory formuł. Ponieważ w definicję logicznej równoważności uwikłany jest język L rozważanej logiki, celem badań jest opis pojęcia logicznej równoważności sformułowany bezpośrednio za pomocą własności strukturalnych.

W przypadku klasycznej teorii modeli poszukiwano strukturalnego opisu pojęcia elementarnej równoważności dwóch klasycznych struktur pierwszego rzędu. Problem ten sformułował Alfred Tarski w latach czterdziestych XX wieku, natomiast rozwiązanie jako pierwszy zaprezentował Roland Fraïssé. Wynik Fraïsségo sformułowany przez Andrzeja Ehrenfeuchta w języku teorii gier znany jest obecnie jako *gra Ehrenfeuchta–Fraïsségo*.

Gra Ehrenfeuchta–Fraïsségo o długości n rozgrywana jest na klasycznych strukturach $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$. Bierze w niej udział dwóch graczy, $\forall$belard i $\exists$loise, którzy w n ruchach porównują rozważane struktury. Aby nadać grze sporny charakter ustalamy, iż celem $\forall$belarda jest wykazać, że struktura $\mathcal{A}$ różni się od struktury $\mathcal{B}$, podczas gdy zamiary $\exists$loise zmierzają w kierunku przeciwnym. Rozgrywkę zawsze rozpoczyna $\forall$belard, który to wybiera jedną ze struktur $\mathcal{A}$ lub $\mathcal{B}$, po czym wskazuje element rozważanej struktury. W odpowiedzi $\exists$loise musi wskazać odpowiedni element drugiej struktury. Rozgrywka zakończona jest po n ruchach każdego z graczy. Otrzymujemy wówczas ciągi $\overline{a} = a_1, \ldots, a_n$ oraz $\overline{b} = b_1, \ldots, b_n$ elementów struktur $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, odpowiednio. Gra zakończona jest wygraną $\exists$loise, gdy odwzorowanie $(\overline{a}; \overline{b}) = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ jest *częściowym izomorfizmem*, to znaczy spełnia następujący warunek

$$\mathcal{A} \models \varphi(\overline{x})[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \varphi(\overline{x})[\overline{b}]$$

dla wszystkich formuł atomowych $\varphi(\overline{x})$. W przeciwnym wypadku grę wygrywa $\forall$belard.

Szanse $\exists$loise na wygraną są więc tym większe, im bliższe są sobie struktury $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$. W istocie, jeśli tylko znany jest izomorfizm $i\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ pomiędzy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, każda rozgrywka zakończona jest wygraną $\exists$loise. Musi ona jedynie przestrzegać poniższej reguły,

Wybierz $i(a)$, gdy $\forall$belard wybrał element a struktury $\mathcal{A}$;
wybierz $i^{-1}(b)$, gdy $\forall$belard wybrał element b struktury $\mathcal{B}$.

Stosując język teorii gier, powiemy, że $\exists$loise posiada *strategię wygrywającą*, to znaczy taki zestaw reguł opisujących możliwe ruchy, który pozwala wygrać każdą rozgrywkę.

Jedna z wersji twierdzenia Ehrenfeuchta–Fraïsségo mówi, iż klasyczne struktury pierwszego rzędu $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są elementarnie równoważne względem wszystkich formuł złożoności kwantyfikatorowej co najwyżej n, o ile tylko istnieje strategia wygrywająca dla $\exists$loise w grze Ehrenfeuchta–Fraïsségo o długości n na strukturach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Ponadto, gdy ograniczymy się do skończonego języka L oraz skończonych struktury $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, implikacja odwrotna także jest prawdziwa.

Następnie, problem strukturalnego opisu logicznej równoważności przeniesiony został na grunt logiki intuicjonistycznej. W przypadku semantyki Kripkego dla logiki intuicjonistycznej poszukiwano strukturalnego opisu pojęcia logicznej równoważności dwóch modeli Kripkego. Jak się okazało opisu takiego dostarcza pojęcie bisymulacji modeli Kripkego.

Bisymulację po raz pierwszy zdefiniował Johan Van Benthem (1976) w kontekście logiki modalnej. Następnie David Park (1981) użył bisymulacji w celu weryfikacji zachowania dowolnych dwóch procesów. Obecnie pojęcie to występuje w wielu dziedzinach informatyki teoretycznej, takich jak na przykład języki funkcyjne, bazy i typy danych czy analiza programów. Wreszcze, jako uogólnienie gry Ehrenfeuchta–Fraïsségo, bisymulacja została wprowadzona do intuicjonistycznej logiki pierwszego rzędu.

Badania nad pojęciem bisymulacji modeli Kripkego dla intuicjonistycznej logiki pierwszego rzędu oraz brak wzajemnej jednoznaczności pomiędzy bisymulacją a logiczną równoważnością stanowiły motywację niniejszej rozprawy. Jej celem jest zaprezentowanie nowych twierdzeń rozstrzygających związek pomiędzy pojęciem bisymulacji i logicznej równoważności. Badane są intuicjonistyczna logika pierwszego rzędu oraz pewne jej szczególne przypadki i rozszerzenia. Rozprawa dostarcza także rozważań nad interpretacją bisymulacji w języku teorii gier.

W Rozdziale 1 rozważamy Intuicjonistyczną Logikę Zdań. Na początek przedstawiona zostanie semantyka Kripkego dla intuicjonistycznej logiki zdaniowej oraz pojęcie warstwowej bisymulacji modeli Kripkego. Nasze rozważania ograniczamy do klasy skończonych modeli Kripkego. Pod tym założeniem wykazana zostaje wzajemna jednoznaczność badanych pojęć.

Kolejny rozdział dotyczy pojęcia bisymulacji modeli Kripkego dla intuicjonistycznej logiki pierwszego rzędu. Po zapoznaniu się z podstawowymi pojęciami przechodzimy do ustalenia odpowiednich związków między bisymulacją a logiczną równoważnością. W [12] wykazano, iż istnienie bisymulacji modeli Kripkego pociąga ich logiczną równoważność. Naszym celem jest dowód implikacji odwrotnej. W tym celu nasze badania zawężamy do klasy silnie skończonych modeli Kripkego o skończenie nasyconych światach.

W kolejnej części rozprawy zwrócimy uwagę na pewne rozszerzenie logiki pierwszego rzędu. Rozdział 3 dotyczyć będzie intuicjonistycznej logiki pierwszego rzędu z silną negacją. Wyróżnimy pozytywną oraz negatywną logiczną równoważność. Po wprowadzeniu pojęcia modelu Kripkego dla rozważanej logiki przystąpimy do zdefiniowania ograniczonej bisymulacji. Następnie przedstawimy wyniki dotyczące związków między bisymulacją a logiczną równoważnością.

Dalsza część rozprawy poświęcona będzie interpretacji ograniczonej bisymulacji w języku teorii gier. W Rozdziale 4 oraz Rozdziale 5 przedstawimy, odpowiednio, definicję gry dla modeli Kripkego dla intuicjonistycznej logiki pierwszego rzędu oraz dla jej rozszerzenia z silną negacją. Wykazane zostaną związki pomiędzy grą a ograniczoną bisymulacją modeli Kripkego. Ponadto, w Rozdziale 4 dokonamy porównania gry dla modeli Kripkego z grą Ehrenfeuchta–Fraïsségo.

Rozdział 1

Bisymulacje modeli Kripkego dla IPC

W rozdziale tym zajmiemy się Intuicjonistycznym Rachunkiem Zdań IPC. Zaczniemy od wprowadzenia podstawowych pojęć i notacji potrzebnych w tej części rozprawy. Następnie przedstawimy definicję bisymulacji modeli Kripkego dla intuicjonistycznej logiki zdaniowej, po czym, powołując się na [16] oraz [11], przedstawimy twierdzenia ustalające związek pomiędzy relacją logicznej równoważności a bisymulacją.

1.1 Pojęcia ogólne

Język intuicjonistycznego rachunku zdań L zbudowany jest ze zbioru zmiennych zdaniowych $\mathcal{P} = \{p, q, r, \ldots\}$, zbioru spójników $\mathcal{I} = \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ oraz stałej *falsum* $\bot$. Symbol $\top$ (*verum*) definiujemy jako skrót $\bot \rightarrow \bot$. Zbiorem *formuł zdaniowych* $\mathcal{L}$ nazywamy najmniejszy zbiór o następujących własnościach:

- $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}, \bot, \top \in \mathcal{L}$
- jeżeli $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$, to $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi \in \mathcal{L}$

System dowodowy w stylu Hilberta IPC możemy uważać za uściślenie interpretacji BHK logiki intuicjonistycznej. Jest on oparty na następujących schematach aksjomatów ([15]):

Ax.1 $\phi \wedge \psi \rightarrow \phi$

Ax.2 $\phi \wedge \psi \rightarrow \psi$

Ax.3 $\phi \rightarrow \big(\psi \rightarrow (\phi \wedge \psi)\big)$

Ax.4 $\phi \to \phi \vee \psi$

Ax.5 $\psi \to \phi \vee \psi$

Ax.6 $(\phi \to \chi) \to \big((\psi \to \chi) \to (\phi \vee \psi \to \chi)\big)$

Ax.7 $\phi \to (\psi \to \phi)$

Ax.8 $\big(\phi \to (\psi \to \chi)\big) \to \big((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi)\big)$

Ax.9 $\bot \to \phi$

wraz z regułą odrywania (*Modus Ponens*):

$$\frac{\phi, \phi \to \psi}{\psi}.$$

Negację formuły φ definiujemy za pomocą implikacji oraz stałej falsum jako $\neg\varphi := \varphi \to \bot$.

Rozważmy następujące odwzorowanie $i\colon \mathcal{L} \to \omega$, zbioru formuł zdaniowych $\mathcal{L}$ w zbiór liczb naturalnych ω, opisujące *złożoność* formuł,

- $i(p) := i(\bot) := i(\top) := 0$
- $i(\varphi \wedge \psi) := i(\varphi \vee \psi) := \max(i(\varphi), i(\psi))$
- $i(\varphi \to \psi) := \max(i(\varphi), i(\psi)) + 1$

Zauważmy, iż jedynym spójnikiem zwiększającym złożoność formuł jest implikacja. W dalszej części rozprawy pod uwagę będą brane formuły określonej złożoności. Dlatego też , dla $\alpha \in \omega$, definiujemy zbiór

$$\mathcal{L}_\alpha := \{\varphi \in \mathcal{L} \colon i(\varphi) \leqslant \alpha\}$$

formuł zdaniowych o złożoności mniejszej bądź równej α.

Dla Intuicjonistycznego Rachunku Zdań istnieje kilka adekwatnych semantyk. Jedną z nich jest semantyka typu Kripkego [6], którą teraz jesteśmy gotowi przedstawić. *Modelem Kripkego* nazywać będziemy strukturę $\mathcal{K} = \langle K, \leqslant, \mathcal{P}, \Vdash_{\mathcal{K}} \rangle$, gdzie K jest niepustym zbiorem elementów zwanych *światami*, $\leqslant$ jest częściowym porządkiem na K, $\mathcal{P}$ jest zbiorem (możliwy zbiór pusty) zmiennych zdaniowych oraz $\Vdash_{\mathcal{K}}$ relacją w $\mathcal{K} \times \mathcal{P}$ zwaną relacją *wymuszania* o następującej własności,

$$(k \Vdash_{\mathcal{K}} p \ \wedge\ k' \geqslant k) \implies k' \Vdash_{\mathcal{K}} p.$$

Definiujemy zbiór
$$PV_{\mathcal{K}}(k) := \{p \in \mathcal{P} \colon k \Vdash_{\mathcal{K}} p\}$$
zmiennych zdaniowych wymuszanych w świecie k modelu $\mathcal{K}$. Następnie, indukcyjnie względem budowy formuły, rozszerzamy definicję $\Vdash_{\mathcal{K}}$ na zbiór formuł zdaniowych $\mathcal{L}$. Dla dowolnego świata $k \in K$,

$$k \nVdash_{\mathcal{K}} \bot \text{ oraz } k \Vdash_{\mathcal{K}} \top$$

$$k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \wedge \psi \iff k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \text{ oraz } k \Vdash_{\mathcal{K}} \psi$$
$$k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \vee \psi \iff k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \text{ lub } k \Vdash_{\mathcal{K}} \psi$$
$$k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \rightarrow \psi \iff \forall_{k' \geqslant k}\ (k' \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \text{ implikuje } k' \Vdash_{\mathcal{K}} \psi)$$

Zauważmy, że z powyższej definicji otrzymujemy:

$$k \Vdash_{\mathcal{K}} \neg\varphi \iff \forall_{k' \geqslant k}\ k' \nVdash_{\mathcal{K}} \varphi.$$

Ponadto, tak zdefiniowana relacja wymuszania jest monotoniczna w tym sensie, że
$$(k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \ \wedge\ k' \geqslant k) \Longrightarrow k' \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi.$$

Model Kripkego $\mathcal{K}$ nazywać będziemy *skończonym* , gdy zbiór światów K jest skończony. *Teorię świata* k modelu Kripkego $\mathcal{K}$ definiujemy jako zbiór formuł zdaniowych wymuszanych w k, to znaczy

$$Th(k) := \{\varphi \in \mathcal{L} \colon k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi\}.$$

Podobnie, rozważając formuły o złożoności mniejszej bądź równej α, definiujemy zbiór
$$Th_{\alpha}(k) := \{\varphi \in \mathcal{L}_{\alpha} \colon k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi\}.$$

Rozważmy następnie dwa modele Kripkego $\mathcal{K} = \langle K, \leqslant, \mathcal{P}, \Vdash_{\mathcal{K}}\rangle$ oraz $\mathcal{M} = \langle M, \leqslant, \mathcal{P}, \Vdash_{\mathcal{M}}\rangle$. Dla światów $k \in K$ i $m \in M$ definiujemy relację $\equiv_{\alpha}$ w następujący sposób ,

$$k \equiv_{\alpha} m \iff Th_{\alpha}(k) = Th_{\alpha}(m)$$

Mówimy, że światy k i m są *α-równoważne* wtedy i tylko wtedy, gdy $k \equiv_{\alpha} m$.

1.2 Bisymulacja warstwowa

Interesującym nas zagadnieniem jest strukturalny opis pojęcia logicznej równoważności. Naturalnym pytaniem jest kiedy światy $k \in K$ oraz $m \in M$ posiadają taką samą teorię, tj. kiedy wymuszają ten sam zbiór formuł. Pojęciem, które opisuje logiczną równoważność modeli Kripkego jest pojęcie bisymulacji. W przypadku Intuicjonistycznej Logiki Zdaniowej bisymulacja została zdefiniowana przez Alberta Vissera w [17], gdzie przedstawia on pojęcie *pełnej* oraz *warstwowej bisymulacji*. Ponieważ badanym przez nas pojęciem jest logiczna równoważność stopnia α, nasza uwaga skupiona będzie na bisymulacji warstwowej.

Rozważmy dwa dowolne modele Kripkego $\mathcal{K} = \langle K, \leqslant, \mathcal{P}, \Vdash \rangle$ oraz $\mathcal{M} = \langle M, \leqslant, \mathcal{P}, \Vdash \rangle$. Niech ω^∞ będzie zbiorem $\omega \cup \{\infty\}$. *Warstwową bisymulacją* pomiędzy modelami $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ nazywamy trójargumentową relację $\sim$ w $K \times \omega^\infty \times M$. Będziemy ją także rozważać jako ω^∞-indeksowany zbiór relacji binarnych pomiędzy K i M. Dla ustalonego $\alpha \in \omega$ zapis $k \sim_\alpha m$ będzie oznaczać, iż trójka (k, α, m) jest ze sobą w relacji. Warunki definiujące warstwową bisymulację są następujące:

(i) $k \sim_\alpha m \Rightarrow PV_{\mathcal{K}}(k) = PV_{\mathcal{M}}(m)$

(ii) $k \sim_{\alpha+1} m \Rightarrow$ dla każdego $k' \geqslant k$ istnieje $m' \geqslant m$ takie, że $k' \sim_\alpha m'$

(iii) $k \sim_{\alpha+1} m \Rightarrow$ dla każdego $m' \geqslant m$ istnieje $k' \geqslant k$ takie, że $k' \sim_\alpha m'$

W przypadku, gdy $\alpha = \infty$ relację $\sim$ nazywamy *bisymulacją*. Wówczas $k \sim_\infty m$, gdy $k \sim_\alpha m$ dla każdego $\alpha \in \omega$.

Zauważmy, iż dla ustalonego $\alpha \in \omega$ relacja $\sim_\alpha$ jest relacją równoważności. Powyższa definicja nie stanowi opisu pojedynczej bisymulacji, lecz determinuje całą klasę relacji $\sim$ spełniających warunki (i)–(iii). Przez $\mathcal{Z}$ oznaczmy zbiór wszystkich warstwowych bisymulacji pomiędzy modelami $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$. Wówczas $\bigcup \mathcal{Z}$ jest maksymalną warstwową bisymulacją pomiędzy wspomnianymi modelami . Określone w sposób koindukcyjny warunki (ii) oraz (iii) nazywane własnościami 'zig' oraz 'zag', odpowiednio, możemy zobrazować przy pomocy poniższych diagramów.

$$\begin{tikzcd}
k' \arrow[r, dotted, no head, bend left, "\sim_\alpha"] & m' \\
k \arrow[u, "\leqslant_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, Rightarrow, no head, bend right, "\sim_{\alpha+1}"] & m \arrow[u, dotted, "\leqslant_{\mathcal{M}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k' \arrow[r, dotted, no head, bend left, "\sim_\alpha"] & m' \\
k \arrow[u, dotted, "\leqslant_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, Rightarrow, no head, bend right, "\sim_{\alpha+1}"] & m \arrow[u, "\leqslant_{\mathcal{M}}"']
\end{tikzcd}$$

Rysunek 1.1: $zig_{\alpha+1}$ oraz $zag_{\alpha+1}$

Ustalmy więc związek pomiędzy relacją logicznej α-równoważności a warstwową bisymulacją. Na początek zaprezentujemy twierdzenie udowodnione w [16] przez Alberta Vissera.

Twierdzenie 1.1 (A.Visser)**.** *Niech $\sim$ będzie warstwową bisymulacją między modelami Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$. Wówczas, dla $k \in K$ oraz $m \in M$,*

$$k \sim_\alpha m \Rightarrow k \equiv_\alpha m.$$

Dowód. Twierdzenie udowodnimy indukcyjnie względem α oraz złożoności formuły $\varphi \in \mathcal{L}_\alpha$. Najpierw dla $\alpha = 0$ zakładamy, że $k \sim_0 m$. Zbiór $\mathcal{L}_0$ jest zbiorem formuł bezimplikacyjnych. Z założenia $PV_{\mathcal{K}}(k) = PV_{\mathcal{M}}(m)$, więc jeśli $\varphi = p$ jest zmienną zdaniową, to

$$k \Vdash_{\mathcal{K}} p \Leftrightarrow m \Vdash_{\mathcal{M}} p.$$

Ponadto,

$$k \nVdash_{\mathcal{K}} \bot \quad \text{i} \quad m \nVdash_{\mathcal{M}} \bot$$

oraz

$$k \Vdash_{\mathcal{K}} \top \quad \text{i} \quad m \Vdash_{\mathcal{M}} \top.$$

Jeśli $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$, to, z definicji wymuszania oraz z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \iff k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_1 \vee \varphi_2 \iff k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_1 \text{ lub } k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_2$$

$$\iff m \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_1 \text{ lub } m \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_2 \iff m \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_1 \vee \varphi_2 \iff m \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi.$$

W przypadku, gdy $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ postępujemy analogicznie.

Zakładamy teraz prawdziwość tezy dla $\alpha \geqslant 0$. Załóżmy, że $k \sim_{\alpha+1} m$ i ustalmy dowolną formułę $\varphi \in \mathcal{L}_{\alpha+1}$. Najpierw rozważymy przypadek, gdy $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$. Przypuśćmy, że

$$k \nVdash_{\mathcal{K}} \psi_1 \to \psi_2.$$

Wówczas, z definicji wymuszania, dla pewnego $k' \geqslant k$ mamy

$$k' \Vdash_{\mathcal{K}} \psi_1 \quad \text{oraz} \quad k' \nVdash_{\mathcal{K}} \psi_2,$$

przy czym $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}_\alpha$. Ponieważ $k \sim_{\alpha+1} m$, więc, z własności 'zig', istnieje takie $m' \geqslant m$, że $k' \sim_\alpha m'$. Stąd, na mocy założenia indukcyjnego zastosowanego dla α, otrzymujemy

$$m' \Vdash_{\mathcal{M}} \psi_1 \quad \text{oraz} \quad m' \nVdash_{\mathcal{M}} \psi_2.$$

Zatem
$$m \nVdash_{\mathcal{M}} \psi_1 \to \psi_2.$$
Analogicznie, korzystając z własności 'zag', dowodzimy odwrotną implikację.

Teraz, niech $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $i(\psi_1) > i(\psi_2)$. A więc $i(\varphi) = i(\psi_1)$. Wówczas, jeśli $\to$ nie jest głównym spójnikiem formuły ψ_1, możemy wnosić, iż ψ_1 jest $\wedge$, $\vee$-kombinacją formuł postaci $\gamma \to \delta$ takich, że $i(\gamma \to \delta) = i(\varphi)$. Ponieważ spójniki $\wedge$ oraz $\vee$ nie wpływają na złożoność implikacyjną formuły, więc jedyną podformułą formuły ψ_1, którą musimy wziąć pod uwagę jest $\gamma \to \delta$, gdzie $i(\gamma), i(\delta) < i(\psi_1)$. Wtedy, na mocy wcześniejszej części dowodu, mamy
$$k \Vdash_{\mathcal{K}} \gamma \to \delta \iff m \Vdash_{\mathcal{M}} \gamma \to \delta,$$
oraz
$$k \Vdash_{\mathcal{K}} \psi_1 \iff m \Vdash_{\mathcal{M}} \psi_1.$$
Stąd,
$$k \Vdash \varphi \iff m \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi.$$
Jak poprzednio, przypadek gdy $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ jest analogiczny. □

Istotnym problemem jest dowód implikacji odwrotnej. Interesujące nas zagadnienie zostało wcześniej udowodnione przez Alberta Vissera. W [16] rozważa on skończony zbiór $\mathcal{P}$ zmiennych zdaniowych i pod tym właśnie założeniem dowodzi wspomnianą tezę. Następnie Anna Patterson w [11] pokazała prawdziwość rozważanej implikacji względem zbioru $\mathcal{L}$ wszystkich formuł zdaniowych oraz nieograniczonej bisymulacji $\sim_\infty$. Dodatkowym założeniem narzuconym przez autorkę była skończoność modeli Kripkego. Tak więc, aby udowodnić, iż relacja logicznej α-równoważności pociąga istnienie warstwowej bisymulacji możemy spodziewać się pewnych dodatkowych założeń. Naszym celem jest dowód wspomnianej implikacji dla logicznej α-równoważności oraz warstwowej bisymulacji $\sim_\alpha$ skończonych modeli Kripkego, bez zakładania skończoności zbioru $\mathcal{P}$.

Twierdzenie 1.2. *Rozważmy skończone modele Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ oraz ich światy k i m, odpowiednio. Wówczas*
$$k \equiv_\alpha m \Rightarrow k \sim_\alpha m.$$

Dowód. Niech k i m będą światami skończonych modeli Kripkego $\mathcal{K} = \langle K, \leqslant, \mathcal{P}, \Vdash_{\mathcal{K}}\rangle$ oraz $\mathcal{M} = \langle M, \leqslant, \mathcal{P}, \Vdash_{\mathcal{M}}\rangle$, odpowiednio. Indukcyjnie względem α pokażemy, że relacja logicznej równoważności $\equiv_\alpha$ jest warstwową bisymulacją.

Na początek ustalmy $\alpha = 0$ i załóżmy $k \equiv_0 m$. To oznacza, że

$$\forall_{\varphi \in \mathcal{L}_0} \; (k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Leftrightarrow m \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi),$$

gdzie $\mathcal{L}_0$ jest zbiorem formuł bezimplikacyjnych. W szczególności, dla $\varphi = p$ mamy

$$k \Vdash_{\mathcal{K}} p \Leftrightarrow m \Vdash_{\mathcal{M}} p.$$

Co oznacza, że $PV_{\mathcal{K}}(k) = PV_{\mathcal{M}}(m)$. A stąd $k \sim_0 m$.

Następnie zakładamy prawdziwość tezy dla $\alpha \geqslant 0$. Załóżmy także, że $k \equiv_{\alpha+1} m$. Ponieważ relacja $\equiv$ jest symetryczna, wystarczy wykazać własność 'zig'. Weźmy dowolny świat $k' \geqslant k$ i oznaczmy

$$\Theta_{k',\alpha} := Th_\alpha(k') = \{\varphi \in \mathcal{L}_\alpha \colon k' \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi\}.$$

Pokażemy, że w modelu $\mathcal{M}$ istnieje taki świat $m' \geqslant m$, że $\Theta_{k',\alpha} = \Theta_{m',\alpha}$. Fakt ten wykażemy w trzech następujących krokach.

(i) Najpierw pokażemy, że każda formuła zdaniowa zbioru $\Theta_{k',\alpha}$ jest spełniana w pewnym świecie dostępnym ze świata m. Istotnie, niech $\varphi \in \Theta_{k',\alpha}$. Jeśli nie istniałby świat dostępny ze świata m, w którym formuła φ była spełniana, wówczas w świecie m spełniana byłaby formuła $\neg\varphi$, tzn. $m \Vdash_{\mathcal{M}} \neg\varphi$. Ponieważ $k' \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi$, więc $k \nVdash_{\mathcal{K}} \neg\varphi$. Zauważmy ponadto, że $\neg\varphi \in \mathcal{L}_{\alpha+1}$. Ale z założenia $k \equiv_{\alpha+1} m$, więc $m \nVdash_{\mathcal{M}} \neg\varphi$, co prowadzi do sprzeczności. A zatem dowolna formuła $\varphi \in \Theta_{k',\alpha}$ jest spełniana w pewnym świecie dostępnym ze świata m.

(ii) Następnie wykażemy, że istnieje co najmniej jeden świat dostępny ze świata m, w którym spełniona jest każda formuła zbioru $\Theta_{k',\alpha}$. Wymaga to następującej konstrukcji. Niech M_1 będzie zbiorem światów modelu $\mathcal{M}$, które nie spełniają wszystkich formuł zbioru $\Theta_{k',\alpha}$. Dla każdego ze światów $n \in M_1$ wybieramy formułę $\varphi_n \in \Theta_{k',\alpha}$ tak, aby $n \nVdash_{\mathcal{M}} \varphi_n$. Z założenia model $\mathcal{M}$ jest skończony, tak więc zbiór M_1 także jest skończony. Przez γ oznaczmy skończoną koniunkcję następującej postaci

$$\gamma = \bigwedge_{n \in M_1} \varphi_n.$$

Zauważmy najpierw, że każdy świat modelu $\mathcal{M}$ spełniający formułę γ spełnia także dowolną formułę zbioru $\Theta_{k',\alpha}$, tj.

$$w \Vdash_{\mathcal{M}} \gamma \Rightarrow w \Vdash_{\mathcal{M}} \Theta_{k',\alpha}.$$

Istotnie, przypuśćmy, że dla pewnego świata w modelu $\mathcal{M}$ mamy

$$w \Vdash_{\mathcal{M}} \gamma \quad \text{oraz} \quad w \nVdash_{\mathcal{M}} \Theta_{k',\alpha}.$$

Ponieważ $w \nVdash_{\mathcal{M}} \Theta_{k',\alpha}$, więc $w \in M_1$. A zatem dla pewnej formuły $\varphi_w \in \Theta_{k',\alpha}$ mamy $w \nVdash_{\mathcal{M}} \varphi_w$. Ponadto, na mocy konstrukcji γ, formuła φ_w stanowi jeden ze składników koniunkcji γ. Stąd $w \Vdash_{\mathcal{M}} \gamma \to \varphi_w$. To oznacza, że $w \nVdash_{\mathcal{M}} \gamma$, co jest sprzeczne z założeniem dotyczącym świata w.

Ponieważ γ jest koniunkcją pewnych formuł ze zbioru $\Theta_{k',\alpha}$, więc $k' \Vdash_{\mathcal{K}} \gamma$. A stąd $k \nVdash_{\mathcal{K}} \neg\gamma$, przy czym $\neg\gamma \in \mathcal{L}_{\alpha+1}$. Z założenia $k \equiv_{\alpha+1} m$, więc $m \nVdash_{\mathcal{M}} \neg\gamma$. Co oznacza, iż istnieje świat $m' \geqslant m$ taki, że $m' \Vdash_{\mathcal{M}} \gamma$. A zatem istnieje świat dostępny ze świata m, który spełnia wszystkie formuły zbioru $\Theta_{k',\alpha}$.

(*iii*) Aby zakończyć dowód pokażemy, że istnieje świat $m' \geqslant m$ spełniający jedynie formuły zbioru $\Theta_{k',\alpha}$. Przez M_2 oznaczmy zbiór światów modelu $\mathcal{M}$, które spełniają pewną formułę złożoności α spoza zbioru $\Theta_{k',\alpha}$. Dla każdego ze światów $n \in M_2$ wybieramy takie $\psi_n \notin \Theta_{k',\alpha}$, że $\psi_n \in \mathcal{L}_\alpha$ oraz $n \Vdash_{\mathcal{M}} \psi_n$. Zauważmy, iż zbiór M_2 jest skończony. Ponadto, przez δ oznaczmy alternatywę następującej postaci

$$\delta = \bigvee_{n \in M_2} \psi_n.$$

W pierwszej kolejności zauważmy, iż każdy świat modelu $\mathcal{M}$ odrzucający δ spełnia jedynie formuły zbioru $\Theta_{k',\alpha}$. Istotnie, gdyby istniał taki świat $w \in \mathcal{M}$, że $w \nVdash_{\mathcal{M}} \delta$ oraz taka formuła $\psi_w \notin \Theta_{k',\alpha}$, że $w \Vdash_{\mathcal{M}} \psi_w$, wówczas, na mocy konstrukcji δ, formuła ψ_w stanowiłaby składnik alternatywy δ. A stąd otrzymalibyśmy $w \Vdash_{\mathcal{M}} \delta$, co jest sprzeczne z założeniem dotyczącym świata w.

Ponieważ δ jest alternatywą formuł złożoności α spoza zbioru $\Theta_{k',\alpha}$, więc $k' \nVdash_{\mathcal{K}} \delta$. Dodatkowo, jak pokazaliśmy w części (*ii*) dowodu, $k' \Vdash_{\mathcal{K}} \gamma$. Stąd, $k \nVdash_{\mathcal{K}} \gamma \to \delta$. Zauważmy jeszcze, że $\gamma \to \delta \in \mathcal{L}_{\alpha+1}$. Z założenia $k \equiv_{\alpha+1} m$, więc $m \nVdash_{\mathcal{M}} \gamma \to \delta$. Oznacza to, iż istnieje świat $m' \geqslant m$ spełniający γ oraz odrzucający δ. Czyli $k' \equiv_\alpha m'$ dla pewnego $m' \geqslant m$. A zatem $k' \sim_\alpha m'$. □

Twierdzenie 1.2 ukazało pełny związek pomiędzy relacją logicznej α-równoważności a warstwową bisymulacją skończonych modeli Kripkego.

Wniosek 1.3. *Rozważmy skończone modele Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ oraz ich światy k i m, odpowiednio. Wówczas*

$$k \equiv_\alpha m \iff k \sim_\alpha m.$$

Rozdział 2

Bisymulacje Modeli Kripkego dla IQC

Niniejszy rozdział poświęcony jest pojęciu bisymulacji modeli Kripkego dla intuicjonistycznej logiki pierwszego rzędu. Rozpoczniemy od wprowadzenia pojęć takich jak charakterystyka formuły, słaby homomorfizm czy model Kripkego, które znaleźć można w [16] oraz [12]. Kompleksowy przegląd zagadnień klasycznej teorii modeli zaprezentowano w [5]. Następnie przedstawiona zostanie definicja ograniczonej bisymulacji modeli Kripkego, po czym badane będą związki pomiędzy logiczną równoważnością a relacją bisymulacji.

2.1 Wprowadzenie do rozdziału

Rozważmy klasyczny język pierwszego rzędu L wraz z równością. Jego (ewentualnie nieskończona) sygnatura składa się z symboli stałych, symboli funkcyjnych oraz relacyjnych. Formuły pierwszego rzędu budowane są z atomów i symboli $\bot$, $\top$ (*falsum* i *verum*) za pomocą spójników $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ oraz kwantyfikatorów $\exists$, $\forall$. Tak jak w przypadku zdaniowym symbol $\neg\varphi$ będzie stanowić skrót dla $\varphi \rightarrow \bot$. Aksjomatyczny system dowodowy w stylu Hilberta IQC stanowią następujące schematy aksjomatów ([15, str. 68]):

Ax.1 $\phi \wedge \psi \rightarrow \phi$

Ax.2 $\phi \wedge \psi \rightarrow \psi$

Ax.3 $\phi \rightarrow \big(\psi \rightarrow (\phi \wedge \psi)\big)$

Ax.4 $\phi \rightarrow \phi \vee \psi$

Ax.5 $\psi \rightarrow \phi \vee \psi$

Ax.6 $(\phi \to \chi) \to \big((\psi \to \chi) \to (\phi \vee \psi \to \chi)\big)$

Ax.7 $\phi \to (\psi \to \phi)$

Ax.8 $\big(\phi \to (\psi \to \chi)\big) \to \big((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi)\big)$

Ax.9 $\bot \to \phi$

Ax.10 $\phi(t) \to \exists_x \phi(x)$, przy czym t jest wolny względem x w ϕ

Ax.11 $\exists_x\big(\phi(x) \to \psi\big) \to \big(\exists_x \phi(x) \to \psi\big)$

Ax.12 $\forall_x \phi(x) \to \phi(t)$, przy czy t jest wolny względem x w ϕ

Ax.13 $\forall_x\big(\psi \to \phi(x)\big) \to \big(\psi \to \forall_x \phi(x)\big)$

wraz z regułą odrywania

$$\frac{\phi, \phi \to \psi}{\psi}$$

i regułą generalizacji

$$\frac{\phi}{\forall_x \phi}.$$

W przypadku intuicjonistycznej logiki pierwszego rzędu kwantyfikatory $\forall$ oraz $\exists$ nie są wzajemnie definiowalne. Dlatego też należy wprowadzić nową miarę złożoności formuł pierwszego rzędu. *Charakterystykę* formuły $\varphi(\overline{x})$, $char(\varphi)$, definiujemy następująco,

- Jeżeli φ jest formułą atomową, to $char(\varphi) = ({}^{\to}0, {}^{\forall}0, {}^{\exists}0)$.

Mając dane formuły φ_1, φ_2, niech $char(\varphi_i) = ({}^{\to}p_i, {}^{\forall}q_i, {}^{\exists}r_i)$ dla $i = 1, 2$. Niech $p = \max(p_1, p_2)$, $q = \max(q_1, q_2)$ oraz $r = \max(r_1, r_2)$.

- Jeżeli $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ lub $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$, to $char(\varphi) = ({}^{\to}p, {}^{\forall}q, {}^{\exists}r)$.
- Jeżeli $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$, to $char(\varphi) = ({}^{\to}p + 1, {}^{\forall}q, {}^{\exists}r)$.
- Jeżeli $\varphi = \forall_x \varphi_1$, to $char(\varphi) = ({}^{\to}p_1, {}^{\forall}q_1 + 1, {}^{\exists}r_1)$.
- Jeżeli $\varphi = \exists_x \varphi_1$, to $char(\varphi) = ({}^{\to}p_1, {}^{\forall}q_1, {}^{\exists}r_1 + 1)$.

Zauważmy, iż jedynymi spójnikami, które nie wpływają na charakterystykę są $\wedge$ oraz $\vee$. Ponadto, jak łatwo zauważyć, tak zdefiniowana miara złożoności formuł generuje nieliniowy porządek. Kładziemy $({}^{\to}p, {}^{\forall}q, {}^{\exists}r) \preceq ({}^{\to}p', {}^{\forall}q', {}^{\exists}r')$ ilekroć $p \leqslant p'$, $q \leqslant q'$ oraz $r \leqslant r'$.

Następnie rozważmy dwie klasyczne struktury pierwszego rzędu, M oraz N, dla języka L. *Słabym homomorfizmem* będziemy nazywać funkcję $f\colon M \to N$ o następujących własnościach:

(i) Dla każdego n, każdego n-argumentowego symbolu funkcyjnego F języka L, oraz każdego n-elementowego ciągu $\overline{a} \in M$,

$$f(F^M(\overline{a})) = F^N(f\overline{a}).$$

(ii) Dla każdego n, każdego n-argumentowego predykatu P języka L, oraz każdego n-elementowego ciągu $\overline{a} \in M$,

$$P^M(\overline{a}) \Longrightarrow P^N(f\overline{a}).$$

Przykładem słabego homomorfizmu jest relacja inkluzji klasycznych struktur. Dodatkowo, funkcję f nazywamy *homomorfizmem*, jeżeli zachodzi również implikacja odwrotna do (ii).

Wprowadzając podstawowe pojęcia należy również przedstawić semantykę typu Kripkego dla intuicjonistycznego rachunku predykatów. Niech $\mathbb{K}$ będzie częściowym porządkiem, postrzeganym także jako mała kategoria. Jego obiekty zwane *punktami* będziemy oznaczać przez $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ itd. Morfizmy między punktami oznaczane będą przez f, g itp. Dla uproszczenia oraz by podkreślić, iż $\mathbb{K}$ jest częściowym porządkiem, wskazując morfizm $f\colon \alpha \to \beta$ między punktami α oraz β będziemy pisać $\alpha \leqslant^f \beta$. Ustalmy jeszcze kategorię $\mathbb{A}$ klasycznych struktur pierwszego rzędu, gdzie rozważanymi morfizmami będą słabe homomorfizmy. Wówczas jako *model Kripkego* dla języka pierwszego rzędu L rozumiemy funktor $\mathcal{K}\colon \mathbb{K} \to \mathbb{A}$, który każdemu morfizmowi $\alpha \leqslant^f \beta$ przyporządkowuje funkcję słabego homomorfizmu $\mathcal{K}(f)\colon \mathcal{K}(\alpha) \to \mathcal{K}(\beta)$. Kategoria $\mathbb{K}$ nazywana jest *strukturą Kripkego modelu* $\mathcal{K}$, natomiast obiekty kategorii $\mathbb{A}$ będziemy nazywać *światami* modelu $\mathcal{K}$. Dla uproszczenia zamiast $\mathcal{K}(f)$ będziemy pisać f, oraz K_α zamiast $\mathcal{K}(\alpha)$. Zauważmy jeszcze, że nieformalnie model Kripkego $\mathcal{K}$ może być postrzegany jako rodzina struktur pierwszego rzędu uporządkowana w sposób częściowy przez słabe homomorfizmy między wspomnianymi strukturami. Celem zapoznania się z ogólną definicją modelu Kripkego można skorzystać z prac [17], [1].

Rozważmy model Kripkego $\mathcal{K}$, punkt $\alpha \in \mathbb{K}$ oraz ciąg $\overline{a} := a_1, \ldots, a_n$ elementów struktury K_α. Relacja wymuszania $\Vdash_{\mathcal{K}}$ na $\mathcal{K}$ zdefiniowana jest indukcyjnie względem budowy formuły w następujący sposób:

- $\alpha \nVdash_{\mathcal{K}} \bot$ oraz $\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \top$
- $\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{x})[\overline{a}] \iff K_\alpha \models \varphi(\overline{x})[\overline{a}]$ dla wszystkich formuł atomowych $\varphi(\overline{x})$
- $\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} (\varphi \wedge \psi)(\overline{x})[\overline{a}] \iff \alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{x})[\overline{a}]$ i $\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \psi(\overline{x})[\overline{a}]$

- $\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} (\varphi \vee \psi)(\overline{x})[\overline{a}] \iff \alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{x})[\overline{a}]$ lub $\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \psi(\overline{x})[\overline{a}]$
- $\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} (\varphi \to \psi)(\overline{x})[\overline{a}] \iff \forall_{\alpha \leqslant^f \alpha'} (\alpha' \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{x})[f\overline{a}]$ implikuje $\alpha' \Vdash_{\mathcal{K}} \psi(\overline{x})[f\overline{a}])$
- $\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \exists_y \varphi(\overline{x})[\overline{a}] \iff \alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{x}, y)[\overline{a}, b]$ dla pewnego elementu $b \in K_\alpha$
- $\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \forall_y \varphi(\overline{x})[\overline{a}] \iff \forall_{\alpha \leqslant^f \alpha'} \alpha' \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{x}, y)[f\overline{a}, b]$ dla wszystkich $b \in K_{\alpha'}$

Zauważmy, że relacja wymusznia jest monotoniczna w tym sensie, że

$$(\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{x})[\overline{a}] \ \wedge \ \alpha \leqslant^f \alpha') \ \Rightarrow \ \alpha' \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{x})[f\overline{a}]$$

dla dowolnej formuły $\varphi(\overline{x})$. Mówimy, że formuła $\varphi(\overline{x})$ jest wymuszana w punkcie α modelu $\mathcal{K}$ przez ciąg $\overline{a}$, gdy $\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{x})[\overline{a}]$. Symbol wymuszania $\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{x})[\overline{a}]$ uprościmy do $\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{a})$. Mówimy, że model $\mathcal{K}$ wymusza formułę $\varphi(\overline{x})$, jeśli jest ona wymuszana w każdym jego punkcie, tzn.

$$\mathcal{K} \Vdash \varphi \iff \alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \text{ dla wszystkich } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Mając dane dwa modele Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ zasadniczym pytaniem jest kiedy światy modelu $\mathcal{K}$ oraz światy modelu $\mathcal{M}$ spełniają te same zbiory formuł. Dlatego też dla punktów $\alpha \in \mathbb{K}$, $\beta \in \mathbb{M}$ definiujemy relację $\equiv_{p,q,r}$ następująco:

$$\alpha \equiv_{p,q,r} \beta \iff (\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Leftrightarrow \beta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi)$$

dla wszystkich takich $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\to}p, {}^{\forall}q, {}^{\exists}r)$. Mówimy, że α oraz β są *równoważne*, $\alpha \equiv \beta$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \equiv_{p,q,r} \beta$ dla wszystkich $p, q, r \geqslant 0$. Mając dane ciągi $\overline{a}$ oraz $\overline{b}$ elementów światów K_α i M_β, odpowiednio, bazując na notacji teoriomodelowej, definiujemy

$$(\alpha, \overline{a}) \equiv_{p,q,r} (\beta, \overline{b}) \iff (\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \beta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(\overline{b}))$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\to}p, {}^{\forall}q, {}^{\exists}r)$.

Rozważmy teraz dowolne struktury pierwszego rzędu A, A' oraz B, B'. Niech $\overline{a} = a_1, \ldots, a_n$ oraz $\overline{b} = b_1, \ldots, b_n$ będą ciągami elementów A i B, odpowiednio, a $f \colon A \to A'$ oraz $g \colon B \to B'$ morfizmami klasycznych struktur. Skończone odwzorowanie $\pi = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ pomiędzy A i B będziemy oznaczać symbolem $(\overline{a}; \overline{b})$. Dla morfizmów f oraz g definiujemy relację $\pi^{f,g} \subseteq A' \times B'$ jako zbiór $\{(fa_1, gb_1), \ldots, (fa_n, gb_n)\}$. Ponadto, definiujemy *częściowy izomorfizm między strukturami A oraz B* jako skończone odwzorowanie $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\} \subseteq A \times B$ takie, że

$$A \models \varphi(\overline{a}) \iff B \models \varphi(\overline{b})$$

dla wszystkich formuł atomowych $\varphi(\overline{x})$.

2.2 Ograniczona Bisymulacja

Po przeglądzie podstawowych zagadnień możemy zaprezentować definicję bisymulacji modeli Kripkego dla logiki intuicjonistycznej pierwszego rzędu ([12]). Rozważmy dwa modele Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$. Niech α oraz β będą punktami struktur Kripkego $\mathbb{K}$ i $\mathbb{M}$, odpowiednio. Niech π przebiega przez wszystkie odwzorowania pomiędzy światami modelu $\mathcal{K}$ i światami modelu $\mathcal{M}$, oraz niech $p, q, r \geqslant 0$. Wówczas *ograniczoną bisymulacją* pomiędzy modelami Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ nazywamy 6-argumentową relację pomiędzy $\pi, \alpha, p, q, r, \beta$, oznaczając $\pi\colon \alpha \sim_{p,q,r} \beta$, spełniającą następujące warunki:

(*i*) $\pi\colon \alpha \sim_{0,0,0} \beta \Longrightarrow \pi$ jest częściowym izomorfizmem pomiędzy K_α i M_β

(*ii*) $\pi\colon \alpha \sim_{p+1,q,r} \beta \Longrightarrow \pi$ jest odwzorowaniem pomiędzy K_α i M_β oraz

($\rightarrow$ -zig) dla każdego $\alpha \leqslant^f \alpha'$ istnieje $\beta \leqslant^g \beta'$ takie, że $\pi^{f,g}\colon \alpha' \sim_{p,q,r} \beta'$

($\rightarrow$ -zag) dla każdego $\beta \leqslant^g \beta'$ istnieje $\alpha \leqslant^f \alpha'$ takie, że $\pi^{f,g}\colon \alpha' \sim_{p,q,r} \beta'$

(*iii*) $\pi\colon \alpha \sim_{p,q+1,r} \beta \Longrightarrow \pi$ jest odwzorowaniem pomiędzy K_α i M_β oraz

($\forall$-zig) dla każdego $\alpha \leqslant^f \alpha'$ i każdego $a \in K_{\alpha'}$ istnieją $\beta \leqslant^g \beta'$ i $b \in M_{\beta'}$ takie, że $\pi^{f,g} \cup \{(a,b)\}\colon \alpha' \sim_{p,q,r} \beta'$

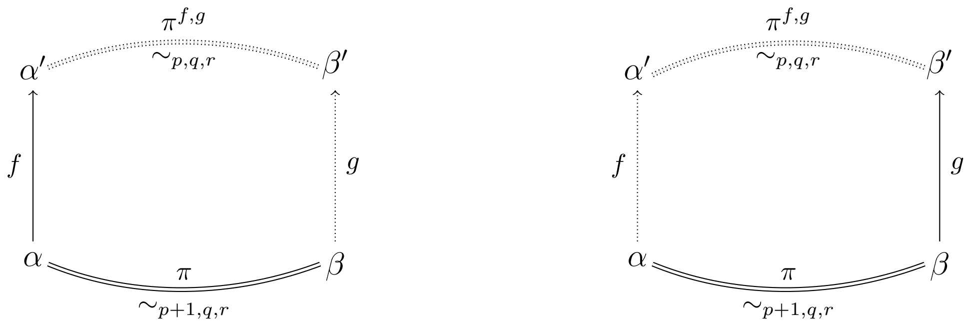
($\forall$-zag) dla każdego $\beta \leqslant^g \beta'$ i każdego $b \in M_{\beta'}$ istnieją $\alpha \leqslant^f \alpha'$ i $a \in K_{\alpha'}$ takie, że $\pi^{f,g} \cup \{(a,b)\}\colon \alpha' \sim_{p,q,r} \beta'$

(*iv*) $\pi\colon \alpha \sim_{p,q,r+1} \beta \Longrightarrow \pi$ jest odwzorowaniem pomiędzy K_α i M_β oraz

($\exists$-zig) dla każdego elementu $a \in K_\alpha$ istnieje element $b \in M_\beta$ taki, że $\pi \cup \{(a,b)\}\colon \alpha \sim_{p,q,r} \beta$

($\exists$-zag) dla każdego elementu $b \in M_\beta$ istnieje element $a \in K_\alpha$ taki, że $\pi \cup \{(a,b)\}\colon \alpha \sim_{p,q,r} \beta$

Rysunki 2.1, 2.2 oraz 2.3 łatwo obrazują poszczególne warunki *zig* i *zag*.



Rysunek 2.1: ($\rightarrow$ -zig) oraz ($\rightarrow$ -zag)

$$
\begin{tikzcd}
\alpha', a \arrow[rrr, dash, dotted, bend left, "\pi^{f,g} \cup \{(a,b)\}", "\sim_{p,q,r}"'] & & & \beta', b \\
\alpha \arrow[u, "f"] \arrow[rrr, equal, bend right, "\pi", "\sim_{p,q+1,r}"'] & & & \beta \arrow[u, dotted, "g"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\alpha', a \arrow[rrr, dash, dotted, bend left, "\pi^{f,g} \cup \{(a,b)\}", "\sim_{p,q,r}"'] & & & \beta', b \\
\alpha \arrow[u, dotted, "f"] \arrow[rrr, equal, bend right, "\pi", "\sim_{p,q+1,r}"'] & & & \beta \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
$$

Rysunek 2.2: ($\forall$-zig) oraz ($\forall$-zag)

$$
\begin{tikzcd}
\alpha, a \arrow[rrr, dash, dotted, bend left, "\pi \cup \{(a,b)\}", "\sim_{p,q,r}"'] & & & \beta, b \\
\alpha \arrow[u, dash] \arrow[rrr, equal, bend right, "\pi", "\sim_{p,q,r+1}"'] & & & \beta \arrow[u, dash, dotted]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\alpha, a \arrow[rrr, dash, dotted, bend left, "\pi \cup \{(a,b)\}", "\sim_{p,q,r}"'] & & & \beta, b \\
\alpha \arrow[u, dash, dotted] \arrow[rrr, equal, bend right, "\pi", "\sim_{p,q,r+1}"'] & & & \beta \arrow[u, dash]
\end{tikzcd}
$$

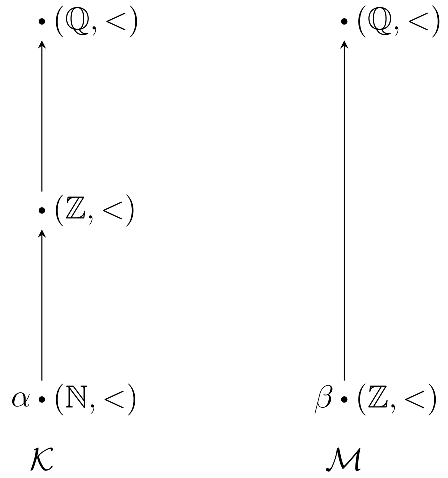
Rysunek 2.3: ($\exists$-zig) oraz ($\exists$-zag)

Rozważmy punkty α oraz β modeli Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, odpowiednio. Powiemy, iż punkty te (p,q,r)-bisymulują, zapisując $\alpha \sim_{p,q,r} \beta$, gdy istnieje relacja $\sim$ oraz odwzorowanie π, będące świadkiem bisymulacji, takie, że $\pi\colon \alpha \sim_{p,q,r} \beta$. Gdy natomiast $\alpha \sim_{p,q,r} \beta$ dla wszystkich $p,q,r \geqslant 0$, powiemy, iż rozważane punkty bisymulują, pisząc $\alpha \sim \beta$.

Jak pokazano w [12] relacja $\sim_{p,q,r}$ jest relacją równoważności. Co więcej, jest ona domknięta na operację sumy. Stąd też każda bisymulacja jest składnikiem pewnej bisymulacji maksymalnej.

Aby jeszcze bardziej przybliżyć pojęcie ograniczonej bisymulacji oraz przyjrzeć się warunkom "zig" i "zag" rozważmy następujący przykład.

Przykład 2.1. Rozważmy modele Kripkego przedstawione na Rysunku 2.4. Światami modeli $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ są klasyczne struktury dla języka $\{<\}$, natomiast morfizmami między światami są zanurzenia struktur. Zauważmy jeszcze, iż formuły atomowe dla rozważanego języka mają postać $x < y$.



Rysunek 2.4: Ograniczona bisymulacja

Wówczas $\sim$ jest taką bisymulacją, że $(0;0)\colon \alpha \sim_{0,1,0} \beta$. Aby zweryfikować własność ($\forall$-zig) należy wykazać, że

$$\forall_{\alpha' \geqslant \alpha} \forall_{a \in K_{\alpha'}} \exists_{\beta' \geqslant \beta} \exists_{b \in M_{\beta'}}\ (0a;0b)\colon \alpha' \sim_{0,0,0} \beta'.$$

W tym celu zauważmy, iż wobec wyboru dowolnego punktu $\alpha' \geqslant \alpha$ modelu $\mathcal{K}$ oraz elementu $a \in K_{\alpha'}$ możliwe jest wskazanie odpowiedniego punktu $\beta' \geqslant \beta$ modelu $\mathcal{M}$ oraz elementu $b \in M_{\beta'}$ takiego, że

$$K_{\alpha'} \models 0 < a \iff M_{\beta'} \models 0 < b.$$

Analogiczny argument dowodzi prawdziwości własności ($\forall$-zag).

Ponadto $\sim$ jest taką bisymulacją, że $(0;0)\colon \alpha \not\sim_{0,0,1} \beta$. Pokażemy, że własność ($\exists$-zag) nie jest spełniona. To znaczy

$$\exists_{b \in M_\beta} \forall_{a \in K_\alpha}\ (0a;0b)\colon \alpha \not\sim_{0,0,0} \beta.$$

Istotnie, jako element $b \in \mathbb{Z}$ wystarczy wskazać dowolny element mniejszy od 0. Wówczas dla każdego elementu $a \in \mathbb{N}$ otrzymamy $(0a;0b)\colon \alpha \not\sim_{0,0,0} \beta$.

2.3 Bisymulacja a Logiczna Równoważność

Kwestią zasadniczą pozostaje ustalenie związku pomiędzy pojęciami logicznej równoważności i ograniczonej bisymulacji. Najpierw zaprezentujemy wynik, którego dowód przedstawiony został w [12].

Twierdzenie 2.2 (T.Połacik). *Niech α i β będą punktami modeli Kripkego $\mathcal{K}$ oraz $\mathcal{M}$, odpowiednio. Załóżmy, że $p, q, r \geqslant 0$, a $(\overline{a}; \overline{b})$ jest takim odwzorowaniem pomiędzy światami K_α i M_β, że dla pewnej bisymulacji $\sim$ mamy $(\overline{a}; \overline{b})\colon \alpha \sim_{p,q,r} \beta$. Wówczas*

$$\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{a}) \iff \beta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(\overline{b})$$

dla każdej takiej formuły $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\rightarrow}p, {}^{\forall}q, {}^{\exists}r)$.

Naturalnym pytaniem jest czy imlikacja odwrotna również zachodzi. Okazuje się, że w tym przypadku nasze rozważania należy ograniczyć do znacznie węższej klasy modeli Kripkego. Mianowicie, potrzebne są pewne dodatkowe założenia dotyczące modeli Kripkego, języka L czy też klasycznych struktur pierwszego rzędu.

Na początek, skończoną sygnaturę języka L będziemy rozpatrywać bez symboli funkcyjnych. Dodatkowo, wprowadzamy następujące pojęcia.

Definicja 2.3. Model Kripkego $\mathcal{K}\colon \mathbb{K} \to \mathbb{A}$ nazywamy *silnie skończonym* wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór częściowo uporządkowany $\mathbb{K}$ oraz obiekty kategorii $\mathbb{A}$ są skończone.

Innymi słowy, model Kripkego $\mathcal{K}$ jest silnie skończony, gdy zarówno struktura Kripkego $\mathbb{K}$ jak i klasyczne struktury pierwszego rzędu przyporządkowane punktom $\mathbb{K}$ są skończone.

Wprowadzimy także definicję skończonej nasyconości modeli Kripkego.

Definicja 2.4. Punkt α modelu Kripkego $\mathcal{K}$ nazywamy *skończenie nasyconym* względem klasy formuł Γ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary formuł $\varphi(x), \psi(x) \in \Gamma$, jeśli istnieją model Kripkego $\mathcal{M}$ oraz taki punkt β modelu $\mathcal{M}$, że

$$\alpha \equiv_\Gamma \beta,$$

a także taki element $b \in M_\beta$, że

$$\beta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(b) \quad \text{i} \quad \beta \nVdash_{\mathcal{M}} \psi(b),$$

to istnieje wówczas taki element $a \in K_\alpha$, że

$$\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(a) \quad \text{i} \quad \alpha \nVdash_{\mathcal{K}} \psi(a).$$

Model Kripkego $\mathcal{K}$ będziemy nazywać *skończenie nasyconym* względem klasy formuł Γ, gdy wszystkie jego punkty są skończenie nasycone względem Γ.

Teraz jesteśmy gotowi udowodnić główny wynik tego rozdziału ([7]).

Twierdzenie 2.5. *Rozważmy silnie skończone modele Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$. Niech $p, q, r \geqslant 0$. Ponadto, niech modele $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ będą skończenie nasycone względem klasy formuł*

$$\Gamma = \{\varphi(\overline{x})\colon char(\varphi) \preceq ({}^{\rightarrow}p + q, {}^{\forall}q, {}^{\exists}r)\}.$$

Rozważmy dowolne punkty α i β modeli $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, odpowiednio, oraz dowolne ciągi $\overline{a}$ i $\overline{b}$ elementów klasycznych struktur K_α i M_β, odpowiednio. Wówczas, jeśli

$$(\alpha, \overline{a}) \equiv_\Gamma (\beta, \overline{b}),$$

to

$$(\overline{a}; \overline{b})\colon \alpha \sim_{p,q,r} \beta$$

dla pewnej bisymulacji $\sim$.

Dowód. Ustalmy punkty α i β skończonych modeli Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$. Niech K_α i M_β będą skończonymi strukturami pierwszego rzędu przypisanymi do tych punktów. Ustalmy ponadto ciągi $\overline{a}$ i $\overline{b}$ elementów struktur K_α i M_β, odpowiednio. Zakładamy, iż $(\alpha, \overline{a}) \equiv_{p+q,q,r} (\beta, \overline{b})$, to znaczy

$$\alpha \Vdash_\mathcal{K} \varphi(\overline{a}) \iff \beta \Vdash_\mathcal{M} \varphi(\overline{b})$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\rightarrow}p+q, {}^{\forall}q, {}^{\exists}r)$. Niech $\gamma \geqslant \alpha$ oraz $\delta \geqslant \beta$ będą dowolnymi punktami dostępnymi z α i β, odpowiednio (gdy nie jest to konieczne i nie prowadzi do zamieszania, indeksy górne f i g oznaczające morfizmy będą pomijane). Ustalmy jeszcze ciągi $\overline{c}$ i $\overline{d}$ elementów klasycznych struktur K_γ oraz M_δ, odpowiednio. Relację $\sim$ definiujemy dla $0 \leqslant i \leqslant p$, $0 \leqslant j \leqslant q$, $0 \leqslant k \leqslant r$ w następujący sposób:

$$(\overline{c}; \overline{d})\colon \gamma \sim_{i,j,k} \delta \iff (\gamma \Vdash_\mathcal{K} \varphi(\overline{c}) \Leftrightarrow \delta \Vdash_\mathcal{M} \varphi(\overline{d}))$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\rightarrow}i + j, {}^{\forall}j, {}^{\exists}k)$. Indukcyjnie względem i, j, k udowodnimy iż $\sim$ jest ograniczoną bisymulacją.

(i) Najpierw zakładamy, że $(\overline{c}; \overline{d})\colon \gamma \sim_{0,0,0} \delta$, tzn.

$$\gamma \Vdash_\mathcal{K} \varphi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash_\mathcal{M} \varphi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\rightarrow}0, {}^{\forall}0, {}^{\exists}0)$. Gdy $\varphi(\overline{x})$ jest formułą atomową, to

$$\gamma \Vdash_\mathcal{K} \varphi(\overline{c}) \iff K_\gamma \models \varphi(\overline{c}),$$

$$\delta \Vdash_\mathcal{M} \varphi(\overline{d}) \iff M_\delta \models \varphi(\overline{d}).$$

Zatem, z założenia, dla wszystkich formuł atomowych $\varphi(\overline{x})$ otrzymujemy

$$K_\gamma \models \varphi(\overline{c}) \iff M_\delta \models \varphi(\overline{d}).$$

To oznacza, że odwzorowanie $(\overline{c};\overline{d})$ jest częściowym izomorfizmem pomiędzy strukturami K_γ i M_δ.

Następnie zakładamy, że teza twierdzenia zachodzi dla pewnych $(i,j,k) \succeq ({}^{\to}0, {}^{\forall}0, {}^{\exists}0)$.

(ii) Dla $i < p, j \leqslant q, k \leqslant r$ załóżmy, że $(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim_{i+1,j,k} \delta$, tzn.

$$\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\to}i+j+1, {}^{\forall}j, {}^{\exists}k)$. Aby zweryfikować własność ($\to$ -zig), wystarczy pokazać, że

$$\forall\gamma \leqslant^f \gamma' \,\exists\delta \leqslant^g \delta' \,\Big(\gamma' \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(f\overline{c}) \iff \delta' \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(g\overline{d})\Big)$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\to}i+j, {}^{\forall}j, {}^{\exists}k)$.

Przypuśćmy nie wprost, iż istnieje taki punkt $\gamma \leqslant^f \gamma'$, że dla każdego punktu $\delta \leqslant^g \delta'$ znajdziemy taką formułę $\varphi_{\delta'}(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\to}i+j, {}^{\forall}j, {}^{\exists}k)$ oraz

$$(\gamma' \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_{\delta'}(f\overline{c}) \text{ i } \delta' \nVdash_{\mathcal{M}} \varphi_{\delta'}(g\overline{d}))$$

lub

$$(\gamma' \nVdash_{\mathcal{K}} \varphi_{\delta'}(f\overline{c}) \text{ i } \delta' \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_{\delta'}(g\overline{d})).$$

Przez Θ oznaczmy zbiór wszystkich formuł $\varphi_{\delta'}(\overline{x})$, które zostały wybrane w powyższy sposób. Ponieważ punkty $\delta' \geqslant \delta$ przebiegają skończony model Kripkego $\mathcal{M}$, więc zbiór Θ także jest skończony. Rozważmy dwa następujące podzbiory zbioru Θ,

$$\Theta_0 = \{\varphi_{\delta'}(\overline{x}) \in \Theta\colon \gamma' \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_{\delta'}(f\overline{c}) \text{ i } \delta' \nVdash_{\mathcal{M}} \varphi_{\delta'}(g\overline{d})\}$$

oraz

$$\Theta_1 = \{\varphi_{\delta'}(\overline{x}) \in \Theta\colon \gamma' \nVdash_{\mathcal{K}} \varphi_{\delta'}(f\overline{c}) \text{ i } \delta' \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_{\delta'}(g\overline{d})\}.$$

Oczywiście zbiory Θ_0 oraz Θ_1 nie mogą być jednocześnie puste. W przypadku, gdy $\Theta_1 = \emptyset$, otrzymamy $\gamma' \Vdash_{\mathcal{K}} \bigwedge\Theta_0(f\overline{c})$. A stąd $\gamma \nVdash_{\mathcal{K}} \neg\bigwedge\Theta_0(\overline{c})$. Ponadto $\delta' \nVdash_{\mathcal{M}} \bigwedge\Theta_0(g\overline{d})$ dla wszystkich $\delta \leqslant^g \delta'$. Więc $\delta \Vdash_{\mathcal{M}} \neg\bigwedge\Theta_0(\overline{d})$, co jest sprzeczne z naszym założeniem, gdyż $char(\neg\bigwedge\Theta_0) \preceq ({}^{\to}i+j+1, {}^{\forall}j, {}^{\exists}k)$.

Podobnie kiedy $\Theta_0 = \emptyset$, otrzymujemy $\gamma' \nVdash_{\mathcal{K}} \bigvee\Theta_1(f\overline{c})$. Stąd $\gamma \nVdash_{\mathcal{K}} \bigvee\Theta_1(\overline{c})$. Dodatkowo, $\delta' \Vdash_{\mathcal{M}} \bigvee\Theta_1(g\overline{d})$ dla wszystkich $\delta \leqslant^g \delta'$. Więc, w szczególności,

$\delta \Vdash_{\mathcal{M}} \bigvee \Theta_1(\overline{d})$. Ale ponieważ $char(\bigvee \Theta_1) \preceq ({}^{\to}i + j, {}^{\forall}j, {}^{\exists}k)$, otrzymujemy natychmiast sprzeczność z założeniem.

Pozostaje rozważyć przypadek, gdy $\Theta_0 \neq \emptyset$ oraz $\Theta_1 \neq \emptyset$. Zauważmy, że

$$\gamma' \Vdash_{\mathcal{K}} \bigwedge \Theta_0(f\overline{c}) \text{ lub } \gamma' \nVdash_{\mathcal{K}} \bigvee \Theta_1(f\overline{c}) \tag{2.1}$$

oraz

$$\delta' \nVdash_{\mathcal{M}} \bigwedge \Theta_0(g\overline{d}) \text{ i } \delta' \Vdash_{\mathcal{M}} \bigvee \Theta_1(g\overline{d}) \tag{2.2}$$

dla wszystkich $\delta \leqslant^g \delta'$. Rozważmy więc formułę $(\bigwedge \Theta_0 \to \bigvee \Theta_1)(\overline{x})$. Zauważmy najpierw, że $char\Big(\bigwedge \Theta_0 \to \bigvee \Theta_1\Big) \preceq ({}^{\to}i + j + 1, {}^{\forall}j, {}^{\exists}k)$. Z (2.1) otrzymujemy

$$\gamma \nVdash_{\mathcal{K}} (\bigwedge \Theta_0 \to \bigvee \Theta_1)(\overline{c}),$$

natomiast z (2.2)

$$\delta \Vdash_{\mathcal{M}} (\bigwedge \Theta_0 \to \bigvee \Theta_1)(\overline{d}),$$

co jest sprzeczne z założeniem iż

$$\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\to}i + j + 1, {}^{\forall}j, {}^{\exists}k)$.

(*iii*) Dla $i \leqslant p, j < q, k \leqslant r$ załóżmy, że $(\overline{c}; \overline{d})\colon \gamma \sim_{i,j+1,k} \delta$, tzn.

$$\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\to}i + j + 1, {}^{\forall}j + 1, {}^{\exists}k)$. Aby zweryfikować własność ($\forall$-zig), wystarczy pokazać, że dla każdego punktu $\gamma \leqslant^f \gamma'$ i każdego elementu $c \in K_{\gamma'}$ istnieją punkt $\delta \leqslant^g \delta'$ oraz element $d \in M_{\delta'}$ takie, że

$$\gamma' \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(f\overline{c}, c) \iff \delta' \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(g\overline{d}, d)$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\to}i + j, {}^{\forall}j, {}^{\exists}k)$. Dla uproszczenia będziemy pomijać parametry $f\overline{c}$ i $g\overline{d}$.

Przypuśćmy nie wprost, iż istnieje taki punkt $\gamma \leqslant^f \gamma'$ i taki element $c \in K_{\gamma'}$, że dla każdego punkt $\delta \leqslant^g \delta'$ oraz każdego elementu $d \in M_{\delta'}$ istnieje taka formuła $\varphi_{\delta',d}(x)$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\to}i + j, {}^{\forall}j, {}^{\exists}k)$ oraz

$$(\gamma' \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_{\delta',d}(c) \text{ i } \delta' \nVdash_{\mathcal{M}} \varphi_{\delta',d}(d))$$

lub

$$(\gamma' \nVdash_{\mathcal{K}} \varphi_{\delta',d}(c) \text{ i } \delta' \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_{\delta',d}(d)).$$

Jak poprzednio, przez Θ oznaczamy zbiór wszystkich formuł $\varphi_{\delta',d}(x)$, które zostały wybrane w powyższy sposób. Ponieważ punkty $\delta' \geqslant \delta$ oraz elementy d przebiegają, odpowiednio, skończony model Kripkego $\mathcal{M}$ oraz skończoną strukturę $M_{\delta'}$, więc zbiór Θ także jest skończony. Rozważmy dwa następujące podzbiory zbioru Θ,

$$\Theta_0 = \{\varphi_{\delta',d}(x) \in \Theta\colon \gamma' \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_{\delta',d}(c) \text{ i } \delta' \nVdash_{\mathcal{M}} \varphi_{\delta',d}(d)\}$$

oraz

$$\Theta_1 = \{\varphi_{\delta',d}(x) \in \Theta\colon \gamma' \nVdash_{\mathcal{K}} \varphi_{\delta',d}(c) \text{ i } \delta' \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_{\delta',d}(d)\}.$$

Gdy zbiór $\Theta_1 = \emptyset$, otrzymamy $\gamma' \Vdash_{\mathcal{K}} \bigwedge \Theta_0(c)$. Stąd, jak łatwo zauważyć $\gamma' \nVdash_{\mathcal{K}} \neg \bigwedge \Theta_0(c)$. Ponieważ $\gamma' \geqslant \gamma$ oraz element $c \in K_{\gamma'}$ były ustalone, więc otrzymujemy $\gamma \nVdash_{\mathcal{K}} \forall_x \neg \bigwedge \Theta_0(x)$. Ponadto $\delta' \nVdash_{\mathcal{M}} \bigwedge \Theta_0(d)$ dla każdego $\delta' \geqslant \delta$ oraz każdego $d \in M_{\delta'}$, co oznacza, że $\delta' \Vdash_{\mathcal{M}} \neg \bigwedge \Theta_0(d)$ dla każdego $\delta' \geqslant \delta$ oraz każdego elementu $d \in M_{\delta'}$. A zatem $\delta \Vdash_{\mathcal{M}} \forall_x \neg \bigwedge \Theta_0(x)$, co jest sprzeczne z naszym założeniem, gdyż $char(\forall_x \neg \bigwedge \Theta_0) \preceq ({}^{\rightarrow}i + j + 1, {}^{\forall} j + 1, {}^{\exists} k)$.

Podobnie kiedy $\Theta_0 = \emptyset$, otrzymujemy $\gamma' \nVdash_{\mathcal{K}} \bigvee \Theta_1(c)$. A stąd $\gamma \nVdash_{\mathcal{K}} \forall_x \bigvee \Theta_1(x)$. Dodatkowo $\delta' \Vdash_{\mathcal{M}} \bigvee \Theta_1(d)$ dla wszystkich $\delta' \geqslant \delta$ oraz wszystkich $d \in M_{\delta'}$. Więc $\delta \Vdash_{\mathcal{M}} \forall_x \bigvee \Theta_1(x)$. Ale ponieważ $char(\forall_x \bigvee \Theta_1) \preceq ({}^{\rightarrow}i + j, {}^{\forall} j + 1, {}^{\exists} k)$, otrzymujemy sprzeczność z założeniem.

Ponownie, pozostaje rozważyć przypadek, gdy $\Theta_0 \neq \emptyset$ oraz $\Theta_1 \neq \emptyset$. Ponieważ

$$\gamma' \Vdash_{\mathcal{K}} \bigwedge \Theta_0(c) \quad \text{i} \quad \gamma' \nVdash_{\mathcal{K}} \bigvee \Theta_1(c),$$

otrzymujemy

$$\gamma \nVdash_{\mathcal{K}} \forall_y (\bigwedge \Theta_0 \rightarrow \bigvee \Theta_1)(y).$$

Ponadto, dla każdego $\delta' \geqslant \delta$ oraz każdego $d \in M_{\delta'}$

$$\delta' \nVdash_{\mathcal{M}} \bigwedge \Theta_0(d) \quad \text{i} \quad \delta' \Vdash_{\mathcal{M}} \bigvee \Theta_1(d),$$

więc otrzymujemy

$$\delta \Vdash_{\mathcal{M}} \forall_y (\bigwedge \Theta_0 \rightarrow \bigvee \Theta_1)(y).$$

Ale $char\Big(\forall_y (\bigwedge \Theta_0 \rightarrow \bigvee \Theta_1)\Big) \preceq ({}^{\rightarrow}i + j + 1, {}^{\forall} j + 1, {}^{\exists} k)$, więc otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że $(\overline{c}; \overline{d})\colon \gamma \sim_{i,j+1,k} \delta$.

(iv) Aby zakończyć dowód, dla $i \leqslant p, j \leqslant q, k < r$ załóżmy, że $(\overline{c}; \overline{d})\colon \gamma \sim_{i,j,k+1} \delta$, tzn.

$$\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\rightarrow}i + j, {}^{\forall} j, {}^{\exists} k + 1)$. Weryfikujemy własność ($\exists$-zig). Musimy więc pokazać, że

$$\forall c \in K_\gamma \, \exists d \in M_\delta \, \Big(\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{c}, c) \iff \delta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(\overline{d}, d)\Big)$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\to}i + j, {}^{\forall}j, {}^{\exists}k)$. Ponownie, dla uproszczenia będziemy pomijać parametry $\overline{c}$ i $\overline{d}$.

Ustalmy $c \in K_\gamma$ i przypuśćmy nie wprost, że taki element $d \in M_\delta$ nie istnieje. Wówczas dla każdego $d \in M_\delta$ istnieje taka formuła $\varphi_d(x)$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\to}i + j, {}^{\forall}j, {}^{\exists}k)$ oraz

$$(\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_d(c) \text{ i } \delta \nVdash_{\mathcal{M}} \varphi_d(d))$$

lub

$$(\gamma \nVdash_{\mathcal{K}} \varphi_d(c) \text{ i } \delta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_d(d)).$$

Niech Θ będzie zbiorem wszystkich takich formuł $\varphi_d(x)$. Ponownie, ponieważ klasyczna struktura M_δ jest skończona, zbiór Θ także jest skończony. Rozważmy więc dwa następujące podzbiory zbioru Θ

$$\Theta_0 = \{\varphi_d(x) \in \Theta \colon \gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_d(c) \text{ i } \delta \nVdash_{\mathcal{M}} \varphi_d(d)\}$$

oraz

$$\Theta_1 = \{\varphi_d(x) \in \Theta \colon \gamma \nVdash_{\mathcal{K}} \varphi_d(c) \text{ i } \delta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_d(d)\}.$$

Ponadto, zdefiniujmy następujące podzbiory struktury M_δ

$$T_0 = \{d \in M_\delta \colon \varphi_d \in \Theta_0\},$$

$$T_1 = \{d \in M_\delta \colon \varphi_d \in \Theta_1\}.$$

Zauważmy najpierw, że

$$d \in T_0 \iff \delta \nVdash_{\mathcal{M}} \bigwedge \Theta_0(d) \tag{2.3}$$

oraz

$$d \in T_1 \iff \delta \Vdash_{\mathcal{M}} \bigvee \Theta_1(d). \tag{2.4}$$

dla każdego $d \in M_\delta$. Zwróćmy jeszcze uwagę, iż zgodnie z założeniem $T_0 \cup T_1 = M_\delta$.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $\Theta_1 = \emptyset$. Wówczas $M_\delta = T_0$ oraz $\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \bigwedge \Theta_0(c)$. A stąd $\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \exists_x \bigwedge \Theta_0(x)$. Ponieważ $\gamma \equiv_{i+j,j,k+1} \delta$, więc $\delta \Vdash_{\mathcal{M}} \exists_x \bigwedge \Theta_0(x)$. Ale z (2.3), $\delta \nVdash_{\mathcal{M}} \bigwedge \Theta_0(d)$ dla każdego $d \in T_0 = M_\delta$. Stąd $\delta \nVdash_{\mathcal{M}} \exists_x \bigwedge \Theta_0(x)$, co daje sprzeczność.

Załóżmy teraz, że $\Theta_0 = \emptyset$, czyli $M_\delta = T_1$. Przez $\psi(x) \in \Gamma$ oznaczmy dowolną formułę dowodliwą w intuicjonistycznej logice predykatów. Wówczas

$$\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \psi(c) \quad \text{i} \quad \gamma \nVdash_{\mathcal{K}} \bigvee \Theta_1(c).$$

Z założenia $\gamma \equiv_{i+j,j,k+1} \delta$. Ponieważ punkt δ jest skończenie nasycony względem Γ, istnieje więc taki element $d \in M_\delta$, że

$$\delta \Vdash_{\mathcal{M}} \psi(d) \quad \text{i} \quad \delta \nVdash_{\mathcal{M}} \bigvee \Theta_1(d).$$

A zatem, z (2.4), otrzymujemy $d \notin T_1 = M_\delta$, co daje sprzeczność.

Na koniec rozważmy przypadek, gdy $\Theta_0 \neq \emptyset$ oraz $\Theta_1 \neq \emptyset$. Wówczas

$$\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \bigwedge \Theta_0(c) \quad \text{i} \quad \gamma \nVdash_{\mathcal{K}} \bigvee \Theta_1(c).$$

Z założenia $\gamma \equiv_{i+j,j,k+1} \delta$. Zauważmy także, że $char(\bigwedge \Theta_0), char(\bigvee \Theta_1) \preceq (^{\rightarrow}i + j, ^{\forall}j, ^{\exists}k)$, czyli $\bigwedge \Theta_0, \bigvee \Theta_1 \in \Gamma$. A ponieważ punkt δ jest skończenie nasycony względem Γ, istnieje więc taki element $d \in M_\delta$, że

$$\delta \Vdash_{\mathcal{M}} \bigwedge \Theta_0(d) \quad \text{i} \quad \delta \nVdash_{\mathcal{M}} \bigvee \Theta_1(d).$$

Zatem, z (2.3) oraz (2.4), otrzymujemy

$$d \notin T_0 \quad \text{i} \quad d \notin T_1.$$

Stąd $T_0 \cup T_1 \neq M_\delta$, co jest sprzeczne z naszym założeniem. □

Łącząc ze sobą Twierdzenie 2.2 oraz Twierdzenie 2.5, jako „przypadek graniczny", otrzymujemy poniższy wniosek.

Wniosek 2.6. *Rozważmy skończenie nasycone i silnie skończone modele Kripkego $\mathcal{K}$ oraz $\mathcal{M}$. Niech α i β będą punktami modeli $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, odpowiednio. Wówczas*

$$\alpha \equiv \beta \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \alpha \sim \beta.$$

Jak można było zauważyć w dowodzie Twierdzenia 2.5, założenie, iż modele $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ są skończenie nasycone względem zbioru Γ jest zastosowane jedynie w przypadku własności ($\exists$-zig). W szczególności, gdy wykluczymy wspomniane założenie, Twierdzenie 2.5 pozostaje prawdziwe, jeśli tylko nasze rozważania ograniczymy do języka L bez kwantyfikatora egzystencjalnego. Dokładniej, otrzymujemy następujący fakt.

Twierdzenie 2.7. *Rozważmy skończony język L bez symboli funkcyjnych oraz bez kwantyfikatora egzystencjalnego. Niech $\mathcal{K}$ oraz $\mathcal{M}$ będą silnie skończonymi modelami Kripkego dla języka L, oraz niech $p, q \geqslant 0$. Rozważmy dowolne punkty α i β modeli $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, odpowiednio, oraz dowolne ciągi $\overline{a}$ i $\overline{b}$ elementów klasycznych struktur K_α i M_β, odpowiednio. Wówczas, jeśli*

$$(\alpha, \overline{a}) \equiv_{(^{\rightarrow}p+q, ^{\forall}q)} (\beta, \overline{b}),$$

to

$$(\overline{a}; \overline{b})\colon \alpha \sim_{(^{\rightarrow}p, ^{\forall}q)} \beta \text{ dla pewnej bisymulacji } \sim .$$

Dowód. Dowód powyższego faktu wynika z dowodu Twierdzenia 2.5. □

Wniosek 2.8. *Rozważmy skończony język L bez symboli funkcyjnych oraz bez kwantyfikatora egzystencjalnego. Niech $\mathcal{K}$ oraz $\mathcal{M}$ będą silnie skończonymi modelami Kripkego dla języka L, oraz niech α i β będą punktami modeli $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, odpowiednio. Wtedy,*

$$\alpha \equiv \beta \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \alpha \sim \beta.$$

Wspomnijmy jeszcze, iż założenie Twierdzenia 2.5 dotyczące skończonej nasyconości modeli Kripkego można zastąpić innym warunkiem. Mianowicie, wystarczy zamiast klasy

$$\Gamma = \{\varphi(\overline{x})\colon char(\varphi) \preceq ({}^{\rightarrow}p + q, {}^{\forall}q, {}^{\exists}r)\}$$

rozważyć klasę

$$\Gamma' = \{\varphi(\overline{x})\colon char(\varphi) \preceq ({}^{\rightarrow}p + q + r, {}^{\forall}q + r, {}^{\exists}r)\}$$

oraz modele Kripkego dla IQC+CD ([3]), gdzie

$$\forall_x(\varphi(y) \vee \psi(xy)) \rightarrow (\varphi(y) \vee \forall_x \psi(xy)) \tag{CD}$$

spełniające Prawo Wyłączonego Środka względem Γ',

$$\forall_{\overline{x}} \Big(\varphi(\overline{x}) \vee \neg\varphi(\overline{x})\Big) \tag{LEM}$$

Jak pokazała Sabine Görnemann w [3], (CD) aksjomatyzuje klasę modeli Kripkego, których światy posiadają stałe uniwersum (domenę).

Twierdzenie 2.9. *Rozważmy $p, q, r \geqslant 0$. Niech $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ będą silnie skończonymi modelami Kripkego dla IQC+CD spełniającymi LEM względem klasy*

$$\Gamma' = \{\varphi(\overline{x})\colon char(\varphi) \preceq ({}^{\rightarrow}p + q + r, {}^{\forall}q + r, {}^{\exists}r)\}.$$

Rozważmy dowolne punkty α i β modeli $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, oraz dowolne ciągi $\overline{a}$ i $\overline{b}$ elementów klasycznych struktur K_α i M_β, odpowiednio. Wówczas, jeśli

$$(\alpha, \overline{a}) \equiv_{\Gamma'} (\beta, \overline{b}),$$

to

$$(\overline{a}; \overline{b})\colon \alpha \sim_{p,q,r} \beta$$

dla pewnej bisymulacji $\sim$.

Dowód. Rozważmy klasę formuł

$$\Gamma' = \{\varphi(\overline{x})\colon char(\varphi) \preceq ({}^{\rightarrow}p+q+r,{}^{\forall}q+r,{}^{\exists}r)\}$$

oraz silnie skończone modele Kripkego dla IQC+CD, $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, spełniające LEM względem Γ'. Niech α i β będą punktami modeli $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, natomiast $\overline{a}$ i $\overline{b}$ ciągami elementów klasycznych struktur K_α i M_β, odpowiednio. Zakładamy, iż $(\alpha,\overline{a}) \equiv_{\Gamma'} (\beta,\overline{b})$, to znaczy

$$\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{a}) \iff \beta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(\overline{b})$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\rightarrow}p+q+r,{}^{\forall}q+r,{}^{\exists}r)$. Weźmy dowolne punkty $\gamma \geqslant \alpha$ oraz $\delta \geqslant \beta$ dostępne z α i β, odpowiednio (gdy nie jest to konieczne i nie prowadzi do zamieszania, indeksy górne f i g oznaczające morfizmy będą pomijane). Ustalmy jeszcze ciągi $\overline{c}$ i $\overline{d}$ elementów klasycznych struktur K_γ oraz M_δ, odpowiednio. Relację $\sim$ definiujemy dla $0 \leqslant i \leqslant p$, $0 \leqslant j \leqslant q$, $0 \leqslant k \leqslant r$ w następujący sposób:

$$(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim_{i,j,k} \delta \iff (\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{c}) \Leftrightarrow \delta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(\overline{d}))$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\rightarrow}i+j+k,{}^{\forall}j+k,{}^{\exists}k)$. Indukcyjnie względem i,j,k udowodnimy iż $\sim$ jest ograniczoną bisymulacją.

Punkty (i)–(iii) będą analogiczne jak w dowodzie Twierdzenia 2.5. Wystarczy jedynie zweryfikować własność ($\exists$-zig).

(iv') Dla $i \leqslant p, j \leqslant q, k < r$ załóżmy, że $(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim_{i,j,k+1} \delta$, tzn.

$$\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\rightarrow}i+j+k+1,{}^{\forall}j+k+1,{}^{\exists}k+1)$. Aby zweryfikować własność ($\exists$-zig) należy pokazać, że

$$\forall c \in K_\gamma\, \exists d \in M_\delta\, \Big(\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{c},c) \iff \delta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(\overline{d},d)\Big)$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\rightarrow}i+j+k,{}^{\forall}j+k,{}^{\exists}k)$. Ponownie, dla uproszczenia będziemy pomijać parametry $\overline{c}$ i $\overline{d}$.

Przypuśćmy nie wprost, iż istnieje taki element $c \in K_\gamma$, że dla każdego $d \in M_\delta$ istnieje taka formuła $\varphi_d(x)$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\rightarrow}i+j+k,{}^{\forall}j+k,{}^{\exists}k)$ oraz

$$(\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_d(c) \text{ i } \delta \nVdash_{\mathcal{M}} \varphi_d(d))$$

lub

$$(\gamma \nVdash_{\mathcal{K}} \varphi_d(c) \text{ i } \delta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_d(d)).$$

Niech Θ będzie zbiorem wszystkich takich formuł $\varphi_d(x)$. Ponieważ klasyczna struktura M_δ jest skończona, zbiór Θ także jest skończony. Rozważmy więc dwa następujące podzbiory zbioru Θ

$$\Theta_0 = \{\varphi_d(x) \in \Theta \colon \gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_d(c) \text{ i } \delta \nVdash_{\mathcal{M}} \varphi_d(d)\}$$

oraz

$$\Theta_1 = \{\varphi_d(x) \in \Theta \colon \gamma \nVdash_{\mathcal{K}} \varphi_d(c) \text{ i } \delta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_d(d)\}.$$

Gdy zbiór $\Theta_1 = \emptyset$, otrzymamy $\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \bigwedge \Theta_0(c)$. Stąd, jak łatwo zauważyć $\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \exists_y \bigwedge \Theta_0(y)$. Ponadto $\delta \nVdash_{\mathcal{M}} \bigwedge \Theta_0(d)$ dla każdego $d \in M_\delta$. To oznacza, że $\delta \nVdash_{\mathcal{M}} \exists_y \bigwedge \Theta_0(y)$, co jest sprzeczne z naszym założeniem, gdyż $char(\exists_y \bigwedge \Theta_0) \preceq ({}^{\rightarrow}i + j + k + 1, {}^{\forall} j + k + 1, {}^{\exists} k + 1)$.

Podobnie kiedy $\Theta_0 = \emptyset$, otrzymujemy $\gamma \nVdash_{\mathcal{K}} \bigvee \Theta_1(c)$. Ponieważ rozważane modele Kripkego spełniają LEM względem klasy Γ', więc w konsekwencji $\gamma' \nVdash_{\mathcal{K}} \bigvee \Theta_1(c)$ dla każdego punktu $\gamma' \geqslant \gamma$. Zatem

$$\exists_{c \in K_\gamma} \forall_{\gamma' \geqslant \gamma} \, \gamma' \nVdash_{\mathcal{K}} \bigvee \Theta_1(c).$$

A stąd

$$\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \exists_y \neg \bigvee \Theta_1(y).$$

Dodatkowo $\delta \Vdash_{\mathcal{M}} \bigvee \Theta_1(d)$ dla wszystkich $d \in M_\delta$. Więc $\delta \nVdash_{\mathcal{M}} \neg \bigvee \Theta_1(d)$ dla każdego $d \in M_\delta$. Zatem

$$\delta \nVdash_{\mathcal{M}} \exists_y \neg \bigvee \Theta_1(y),$$

ale ponieważ $char(\exists_y \neg \bigvee \Theta_1) \preceq ({}^{\rightarrow}i+j+k+1, {}^{\forall} j+k+1, {}^{\exists} k+1)$, otrzymujemy sprzeczność z założeniem.

Pozostaje rozważyć przypadek, gdy $\Theta_0 \neq \emptyset$ oraz $\Theta_1 \neq \emptyset$. Wówczas

$$\gamma \Vdash_{\mathcal{K}} \bigwedge \Theta_0(c) \quad \text{i} \quad \gamma \nVdash_{\mathcal{K}} \bigvee \Theta_1(c).$$

Wobec założenia LEM otrzymamy

$$\gamma \nVdash_{\mathcal{K}} \forall_y (\bigwedge \Theta_0 \rightarrow \bigvee \Theta_1)(y).$$

Ponadto, dla każdego $d \in M_\delta$

$$\delta \nVdash_{\mathcal{M}} \bigwedge \Theta_0(d) \quad \text{lub} \quad \delta \Vdash_{\mathcal{M}} \bigvee \Theta_1(d).$$

Korzystając z założenia dotyczącego LEM oraz CD dostaniemy

$$\delta \Vdash_{\mathcal{M}} \forall_y (\bigwedge \Theta_0 \rightarrow \bigvee \Theta_1)(y).$$

Ale $char\Big(\forall_y (\bigwedge \Theta_0 \rightarrow \bigvee \Theta_1)\Big) \preceq ({}^{\rightarrow}i + j + k + 1, {}^{\forall} j + k + 1, {}^{\exists} k + 1)$, więc otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że $(\overline{c}; \overline{d}) \colon \gamma \sim_{i,j,k+1} \delta$. $\square$

Rozdział 3

Bisymulacje modeli Kripkego dla IQC+SN

Badając logiczną równoważność modeli Kripkego oraz szukając strukturalnego opisu dla tego pojęcia naszą uwagę zwróciło pewne rozszerzenie logiki intuicjonistycznej. Mianowicie, w rozdziale tym badać będziemy *intuicjonistyczną logikę pierwszego rzędu z silną negacją.*

3.1 Wprowadzenie do IQC+SN

Spójnik silnej negacji został po raz pierwszy wprowadzony w [10] przez Leonarda Nelsona w związku z jego rozważaniami nad interpretacją realizowalności Kleenego. W tym samym czasie Andriej Markov pokazał niezależnie w [8] iż intuicjonistyczna negacja może być zdefiniowana przy pomocy spójników silnej negacji i implikacji. Następnie pojęcie silnej negacji eksplorował Nikolaj Vorob'ev. W [18] sformułował on logikę zdaniową z silną negacją. Natomiast Helena Rasiowa badała w [13] oraz [14] owe pojęcie pod kątem teorii krat.

Silna negacja jest negacją znacznie różniącą się od intuicjonistycznej negacji. Dla przykładu, w logice intuicjonistycznej formuła $\neg(\varphi \wedge \psi)$ nie pociąga alternatywy formuł $\neg\varphi$ lub $\neg\psi$. Ale jeśli zastąpić intuicjonistyczną negację spójnikiem silnej negacji uzyskamy równoważność wspomnianych formuł.

Rozważmy zbiór $\mathcal{I} = \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ spójników intuicjonistycznych oraz stałą $\perp$. Symbol $\neg$ nazywać będziemy *negacją intuicjonistyczną*, utożsamiając skrót $\neg\varphi$ z implikacją $\varphi \rightarrow \perp$. Formuły logiki intuicjonistycznej pierwszego rzędu budujemy jak poprzednio za pomocą spójników zbioru $\mathcal{I}$, stałej $\perp$ oraz kwantyfikatorów $\forall$, $\exists$. Następnie rozważmy zbiór $\mathcal{N} = \mathcal{I} \cup \{\sim\}$. Symbol $\sim$ oznaczać będzie jednoargumentowy spójnik zwany dalej *silną negacją*. Formuły intuicjonistycznej logiki pierwszego rzędu z silną negacją IQC+SN budowane są w standardowy sposób przy użyciu spójników zbioru $\mathcal{N}$, stałej $\perp$ oraz kwantyfikatorów.

Intuicjonistyczny system dowodowy w stylu Hilberta dla logiki IQC+SN otrzymujemy rozszerzając system hilbertowski dla logiki intuicjonistycznej. Dodatkowe aksjomaty charakteryzują silną negację $\sim$ w następujący sposób,

1. $\varphi \to (\sim \varphi \to \psi)$,
2. $\sim (\varphi \land \psi) \leftrightarrow \sim \varphi \lor \sim \psi$,
3. $\sim (\varphi \lor \psi) \leftrightarrow \sim \varphi \land \sim \psi$,
4. $\sim (\varphi \to \psi) \leftrightarrow \varphi \land \sim \psi$,
5. $\sim\sim \varphi \leftrightarrow \varphi$,
6. $\sim \neg\varphi \leftrightarrow \varphi$,
7. $\sim \forall_y \varphi \leftrightarrow \exists_y \sim \varphi$,
8. $\sim \exists_y \varphi \leftrightarrow \forall_y \sim \varphi$.

Jak widzimy, przy pomocy spójnika silnej negacji kwantyfikatory $\forall$ oraz $\exists$ są wzajemnie definiowalne. Dlatego też należy określić nową miarę złożoności formuł, która to uwzględniać będzie spójnik implikacji, jeden z kwantyfikatorów oraz silną negację. *Silną charakterystykę* formuły $\varphi(\overline{x})$, *s-char*(φ), definiujemy następująco:

- Jeżeli φ jest formułą atomową, to *s-char*$(\varphi) = ({}^{\sim}0, {}^{\to}0, {}^{\forall}0)$.

Mając dane formuły φ_1, φ_2, niech *s-char*$(\varphi_i) = ({}^{\sim}s_i, {}^{\to}t_i, {}^{\forall}w_i)$ dla $i = 1, 2$. Niech $s = \max(s_1, s_2)$, $t = \max(t_1, t_2)$ oraz $w = \max(w_1, w_2)$. Wówczas,

- Jeżeli $\varphi = \sim \varphi_1$, to *s-char*$(\varphi) = ({}^{\sim}s_1 + 1, {}^{\to}t_1, {}^{\forall}w_1)$.
- Jeżeli $\varphi = \varphi_1 \land \varphi_2$ lub $\varphi = \varphi_1 \lor \varphi_2$, to *s-char*$(\varphi) = ({}^{\sim}s, {}^{\to}t, {}^{\forall}w)$.
- Jeżeli $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$, to *s-char*$(\varphi) = ({}^{\sim}s, {}^{\to}t + 1, {}^{\forall}w)$.
- Jeżeli $\varphi = \forall_x \varphi_1$, to *s-char*$(\varphi) = ({}^{\sim}s_1, {}^{\to}t_1, {}^{\forall}w_1 + 1)$.

Semantyka Kripkego dla IQC+SN jest rozszerzeniem semantyki dla IQC omówionej w rozdziale 2. *Modelem Kripkego* dla intuicjonistycznej logiki pierwszego rzędu z silną negacją nazywamy strukturę

$$\mathcal{K} = \Big\langle K, \leqslant, \{(K_\alpha, V_\alpha^P, V_\alpha^N) \colon \alpha \in K\} \Big\rangle.$$

Niepusty, częściowo uporządkowany zbiór K jest, jak poprzednio, zbiorem elementów zwanych *punktami*. Do każdego punktu $\alpha \in K$ przyporządkowany jest niepusty zbiór K_α zwany *światem*. Rolę słabego homomorfizmu pomiędzy dwoma dowolnymi światami pełnić będzie relacja inkluzji. Zakładamy więc, iż

$$\alpha \leqslant \alpha' \Rightarrow K_\alpha \subseteq K_{\alpha'}.$$

W świecie K_α definiowana jest interpretacja pozytywna V_α^P oraz negatywna V_α^N symboli relacyjnych. Dla n-argumentowego predykatu R określamy n-argumentowe relacje $R^{V_\alpha^P}$ i $R^{V_\alpha^N}$ w K_α o następujących własnościach,

1. $R^{V_\alpha^P} \cap R^{V_\alpha^N} = \emptyset$,
2. $\alpha \leqslant \alpha' \Rightarrow R^{V_\alpha^P} \subseteq R^{V_{\alpha'}^P}$,
3. $\alpha \leqslant \alpha' \Rightarrow R^{V_\alpha^N} \subseteq R^{V_{\alpha'}^N}$.

Mając dany model Kripkego $\mathcal{K}$ interpretacje V^P oraz V^N rozszerzamy indukcyjnie względem budowy formuły na relacje wymuszania pozytywnego $\Vdash^P$ oraz negatywnego $\Vdash^N$. Rozważmy punkt $\alpha \in K$ oraz ciąg $\overline{a} := a_1, \ldots, a_n$ elementów świata K_α. Wówczas:

- $\alpha \Vdash^P R(\overline{a}) \iff \overline{a} \in R^{V_\alpha^P}$ dla dowolnego symbolu predykatywnego $R(\overline{x})$
- $\alpha \Vdash^N R(\overline{a}) \iff \overline{a} \in R^{V_\alpha^N}$ dla dowolnego symbolu predykatywnego $R(\overline{x})$
- $\alpha \Vdash^P (\varphi \wedge \psi)(\overline{a}) \iff \alpha \Vdash^P \varphi(\overline{a}) \quad \text{i} \quad \alpha \Vdash^P \psi(\overline{a})$
- $\alpha \Vdash^N (\varphi \wedge \psi)(\overline{a}) \iff \alpha \Vdash^N \varphi(\overline{a}) \quad \text{lub} \quad \alpha \Vdash^N \psi(\overline{a})$
- $\alpha \Vdash^P (\varphi \vee \psi)(\overline{a}) \iff \alpha \Vdash^P \varphi(\overline{a}) \quad \text{lub} \quad \alpha \Vdash^P \psi(\overline{a})$
- $\alpha \Vdash^N (\varphi \vee \psi)(\overline{a}) \iff \alpha \Vdash^N \varphi(\overline{a}) \quad \text{i} \quad \alpha \Vdash^N \psi(\overline{a})$
- $\alpha \Vdash^P (\varphi \to \psi)(\overline{a}) \iff \forall_{\alpha' \geqslant \alpha} (\alpha' \Vdash^P \varphi(\overline{a}) \text{ implikuje } \alpha' \Vdash^P \psi(\overline{a}))$
- $\alpha \Vdash^N (\varphi \to \psi)(\overline{a}) \iff \alpha \Vdash^P \varphi(\overline{a}) \quad \text{i} \quad \alpha \Vdash^N \psi(\overline{a})$
- $\alpha \Vdash^P \neg\varphi(\overline{a}) \iff \forall_{\alpha' \geqslant \alpha} \alpha' \nVdash^P \varphi(\overline{a})$
- $\alpha \Vdash^N \neg\varphi(\overline{a}) \iff \alpha \Vdash^P \varphi(\overline{a})$
- $\alpha \Vdash^P \sim \varphi(\overline{a}) \iff \alpha \Vdash^N \varphi(\overline{a})$
- $\alpha \Vdash^N \sim \varphi(\overline{a}) \iff \alpha \Vdash^P \varphi(\overline{a})$

- $\alpha \Vdash^P \exists_y \varphi(\overline{a}, y) \iff \alpha \Vdash^P \varphi(\overline{a}, b)$ dla pewnego elementu $b \in K_\alpha$
- $\alpha \Vdash^N \exists_y \varphi(\overline{a}, y) \iff \forall_{\alpha' \geqslant \alpha}\, \alpha' \Vdash^N \varphi(\overline{a}, b)$ dla wszystkich $b \in K_{\alpha'}$
- $\alpha \Vdash^P \forall_y \varphi(\overline{a}, y) \iff \forall_{\alpha' \geqslant \alpha}\, \alpha' \Vdash^P \varphi(\overline{a}, b)$ dla wszystkich $b \in K_{\alpha'}$
- $\alpha \Vdash^P \forall_y \varphi(\overline{a}, y) \iff \alpha \Vdash^N \varphi(\overline{a}, b)$ dla pewnego elementu $b \in K_\alpha$

Zauważmy, iż tak zdefiniowane relacje wymusznia są monotoniczne w następującym sensie

$$(\alpha \Vdash^P \varphi(\overline{a}) \ \wedge\ \alpha' \geqslant \alpha) \ \Rightarrow\ \alpha' \Vdash^P \varphi(\overline{a}),$$

$$(\alpha \Vdash^N \varphi(\overline{a}) \ \wedge\ \alpha' \geqslant \alpha) \ \Rightarrow\ \alpha' \Vdash^N \varphi(\overline{a})$$

dla dowolnej formuły $\varphi(\overline{x})$. Ponadto, żadna formuła $\varphi(\overline{x})$ nie jest jednocześnie wymuszana w sposób pozytywny i negatywny.

Mając dane dwa dowolne modele Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ naturalnym zagadnieniem jest ich logiczna równoważność. Celem naszych badań jest określenie kiedy punkty modelu $\mathcal{K}$ oraz punkty modelu $\mathcal{M}$ spełniają te same zbiory formuł. Mając na uwadze pozytywną oraz negatywną relację wymuszania, rozważać będziemy logiczną równoważność punktów $\alpha \in K$ i $\beta \in M$ w sensie zarówno pozytywnym, jak i negatywnym. Relację $\equiv_{s,t,w}$ definiujemy w następujący sposób:

$$\alpha \equiv_{s,t,w} \beta \iff \begin{cases} (\alpha \Vdash^P \varphi \Leftrightarrow \beta \Vdash^P \varphi) \\ \text{oraz} \\ (\alpha \Vdash^N \varphi \Leftrightarrow \beta \Vdash^N \varphi) \end{cases}$$

dla wszystkich takich $\varphi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\varphi) \preceq ({}^{\sim}s, {}^{\rightarrow}t, {}^{\forall}w)$. Aby uprościć zapis powyższej definicji będziemy stosować notację

$$\alpha \equiv_{s,t,w} \beta \iff \big(\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Leftrightarrow \beta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi\big).$$

Punkty α oraz β będziemy nazywać *równoważnymi*, zapisując $\alpha \equiv \beta$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \equiv_{s,t,w} \beta$ dla wszystkich $s, t, w \geqslant 0$. Mając dane ciągi $\overline{a}$ oraz $\overline{b}$ elementów światów K_α i M_β, odpowiednio, bazując na notacji teoriomodelowej, zdefiniujemy

$$(\alpha, \overline{a}) \equiv_{s,t,w} (\beta, \overline{b}) \iff \big(\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \beta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(\overline{b})\big)$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\varphi) \preceq ({}^{\sim}s, {}^{\rightarrow}t, {}^{\forall}w)$.

3.2 Bisymulacje Modeli Kripkego dla IQC+SN

Celem znalezienia strukturalnego opisu dla logicznej równoważności modeli Kripkego ponownie rozważymy relację ograniczonej bisymulacji. Zanim jednak przedstawimy definicję bisymulacji, musimy zapoznać się z poniższymi pojęciami.

Rozważmy dwia dowolne światy A i B oraz ciągi $\overline{a} = a_1, \ldots, a_n$ i $\overline{b} = b_1, \ldots, b_n$ elementów tych światów, odpowiednio. Skończone odwzorowanie $(\overline{a}; \overline{b}) = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\} \subseteq A \times B$ nazwiemy *częściowym P-izomorfizmem pomiędzy światami A oraz B*, gdy

$$A \Vdash^P \varphi(\overline{a}) \iff B \Vdash^P \varphi(\overline{b})$$

dla wszystkich formuł atomowych $\varphi(\overline{x})$.

Odwzorowanie $(\overline{a}; \overline{b})$ nazwiemy z kolei *częściowym N-izomorfizmem pomiędzy światami A oraz B*, gdy

$$A \Vdash^N \varphi(\overline{a}) \iff B \Vdash^N \varphi(\overline{b})$$

dla wszystkich formuł atomowych $\varphi(\overline{x})$.

Teraz jesteśmy już gotowi przedstawić pojęcie bisymulacji modeli Kripkego dla logiki intuicjonistycznej pierwszego rzędu z silną negacją. Tak jak w przypadku logicznej równoważności, wyróżniać będziemy pozytywną i negatywną część bisymulacji. Dla każdego z fragmentów bisymulacji sformułujemy odpowiednie warunki, a pełny jej opis stanowić będzie ich para.

Rozważmy dwa modele Kripkego $\mathcal{K} = \left\langle K, \leqslant, \{(K_\alpha, V_\alpha^P, V_\alpha^N) \colon \alpha \in K\}\right\rangle$ i $\mathcal{M} = \left\langle M, \leqslant, \{(M_\beta, U_\beta^P, U_\beta^N) \colon \beta \in M\}\right\rangle$ oraz ich dowolne punkty $\alpha \in K$ i $\beta \in M$. Niech π przebiega przez wszystkie odwzorowania pomiędzy światami modelu $\mathcal{K}$ i światami modelu $\mathcal{M}$, oraz niech $s, t, w \geqslant 0$. Wówczas *ograniczoną bisymulacją* pomiędzy modelami Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ nazywamy parę $\sim\, = \{\sim^P, \sim^N\}$, gdzie $\sim^P$ oraz $\sim^N$ są 6-argumentowymi relacjami pomiędzy $\pi, \alpha, s, t, w, \beta$. Oznaczając $\pi \colon \alpha \sim_{s,t,w}^P \beta$ bądź $\pi \colon \alpha \sim_{s,t,w}^N \beta$, spełnione są następujące warunki:

(*i*) $\pi \colon \alpha \sim_{0,0,0}^P \beta \Longrightarrow \pi$ jest częściowym P-izomorfizmem pomiędzy światami K_α i M_β

(*ii*) $\pi \colon \alpha \sim_{0,0,0}^N \beta \Longrightarrow \pi$ jest częściowym N-izomorfizmem pomiędzy światami K_α i M_β

(*iii*) $\pi \colon \alpha \sim_{s+1,t,w}^P \beta \Longrightarrow \pi \colon \alpha \sim_{s,t,w}^N \beta$

(*iv*) $\pi \colon \alpha \sim_{s+1,t,w}^N \beta \Longrightarrow \pi \colon \alpha \sim_{s,t,w}^P \beta$

(v) $\pi\colon \alpha \sim^{P}_{s,t+1,w} \beta \Longrightarrow \pi$ jest odwzorowaniem pomiędzy K_α i M_β oraz

$(\to\text{-zig})^P$ dla każdego $\alpha' \geqslant \alpha$ istnieje $\beta' \geqslant \beta$ takie, że $\pi\colon \alpha' \sim^{P}_{s,t,w} \beta'$

$(\to\text{-zag})^P$ dla każdego $\beta' \geqslant \beta$ istnieje $\alpha' \geqslant \alpha$ takie, że $\pi\colon \alpha' \sim^{P}_{s,t,w} \beta'$

(vi) $\pi\colon \alpha \sim^{N}_{s,t+1,w} \beta \Longrightarrow \pi\colon \alpha \sim^{P}_{s,t,w} \beta$ oraz $\pi\colon \alpha \sim^{N}_{s,t,w} \beta$

(vii) $\pi\colon \alpha \sim^{P}_{s,t,w+1} \beta \Longrightarrow \pi$ jest odwzorowaniem pomiędzy K_α i M_β oraz

$(\forall\text{-zig})^P$ dla każdego $\alpha' \geqslant \alpha$ i każdego $a \in K_{\alpha'}$ istnieją $\beta' \geqslant \beta$ i $b \in M_{\beta'}$ takie, że $\pi \cup \{(a,b)\}\colon \alpha' \sim^{P}_{s,t,w} \beta'$

$(\forall\text{-zag})^P$ dla każdego $\beta' \geqslant \beta$ i każdego $b \in M_{\beta'}$ istnieją $\alpha' \geqslant \alpha$ i $a \in K_{\alpha'}$ takie, że $\pi \cup \{(a,b)\}\colon \alpha' \sim^{P}_{s,t,w} \beta'$

$(viii)$ $\pi\colon \alpha \sim^{N}_{s,t,w+1} \beta \Longrightarrow \pi$ jest odwzorowaniem pomiędzy K_α i M_β oraz

$(\forall\text{-zig})^N$ dla każdego elementu $a \in K_\alpha$ istnieje element $b \in M_\beta$ taki, że $\pi \cup \{(a,b)\}\colon \alpha \sim^{N}_{s,t,w} \beta$

$(\forall\text{-zag})^N$ dla każdego elementu $b \in M_\beta$ istnieje element $a \in K_\alpha$ taki, że $\pi \cup \{(a,b)\}\colon \alpha \sim^{N}_{s,t,w} \beta$

Powiemy, iż dowolne punkty α oraz β modeli Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, odpowiednio, (s,t,w)-bisymulują, zapisując $\alpha \sim_{s,t,w} \beta$, gdy istnieje relacja $\sim\, = \{\sim^P, \sim^N\}$ oraz odwzorowanie π, będące świadkiem bisymulacji, takie, że $\pi\colon \alpha \sim^{P}_{s,t,w} \beta$ oraz $\pi\colon \alpha \sim^{N}_{s,t,w} \beta$. Tak zdefiniowana relacja bisymulacji jest domknięta na operację sumy. Stąd też każda bisymulacja jest składnikiem pewnej bisymulacji maksymalnej. Mówimy, że bisymulacja $\sim$ jest *domknięta z dołu*, gdy

$$(s',t',w') \preceq (s,t,w) \implies \sim_{s,t,w} \subseteq \sim_{s',t',w'} .$$

Tak więc każda bisymulacja maksymalna jest domknięta z dołu. Dla uproszczenia naszych badań, rozważać będziemy bisymulacje maksymalne.

Dalsze twierdzenia nakreślą związek pomiędzy relacją ograniczonej bisymulacji a logicznej równoważności modeli Kripkego.

Twierdzenie 3.1. *Rozważmy punkty α i β modeli Kripkego $\mathcal{K}$ oraz $\mathcal{M}$, odpowiednio. Załóżmy, że $s,t,w \geqslant 0$, a $(\overline{a};\overline{b})$ jest takim odwzorowaniem pomiędzy światami K_α i M_β, że dla pewnej bisymulacji maksymalnej $\sim\, = \{\sim^P, \sim^N\}$ mamy $(\overline{a};\overline{b})\colon \alpha \sim_{s,t,w} \beta$. Wówczas*

$$(\overline{a};\overline{b})\colon \alpha \sim^{P}_{s,t,w} \beta \Longrightarrow (\alpha,\overline{a}) \equiv^{P}_{s,t,w} (\beta,\overline{b})$$

oraz

$$(\overline{a};\overline{b})\colon \alpha \sim^{N}_{s,t,w} \beta \Longrightarrow (\alpha,\overline{a}) \equiv^{N}_{s,t,w} (\beta,\overline{b}).$$

Dowód. Ustalmy punkty α i β modeli Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$. Niech K_α i M_β będą światami przypisanymi do tych punktów. Ustalmy ponadto ciągi $\overline{a}$ i $\overline{b}$ elementów światów K_α i M_β, odpowiednio. Twierdzenie zostanie udowodnione indukcyjnie względem silnej charakterystyki oraz złożoności formuł.

(i) Weźmy dowolną formułę $\varphi(\overline{x})$ taką, że $s\text{-}char(\varphi) = ({}^{\sim}0, {}^{\rightarrow}0, {}^{\forall}0)$. Z założenia $(\overline{a};\overline{b})\colon \alpha \sim^{P}_{0,0,0} \beta$, to znaczy odwzorowanie $(\overline{a};\overline{b})$ jest częściowym P-izomorfizmem pomiędzy światami K_α i M_β. Ponadto $(\overline{a};\overline{b})\colon \alpha \sim^{N}_{0,0,0} \beta$, więc $(\overline{a};\overline{b})$ jest także częściowym N-izomorfizmem między K_α i M_β. To znaczy,

$$\alpha \Vdash^P \psi(\overline{a}) \iff \beta \Vdash^P \psi(\overline{b})$$

oraz

$$\alpha \Vdash^N \psi(\overline{a}) \iff \beta \Vdash^N \psi(\overline{b})$$

dla wszystkich formuł atomowych $\psi(\overline{x})$. Z kolei formuła $\varphi(\overline{x})$ jest $\wedge, \vee$-kombinacją pewnych formuł atomowych. Stąd też

$$\alpha \Vdash^P \varphi(\overline{a}) \iff \beta \Vdash^P \varphi(\overline{b})$$

oraz

$$\alpha \Vdash^N \varphi(\overline{a}) \iff \beta \Vdash^N \varphi(\overline{b}).$$

Rozważmy teraz trójkę $({}^{\sim}s, {}^{\rightarrow}t, {}^{\forall}w) \succeq ({}^{\sim}0, {}^{\rightarrow}0, {}^{\forall}0)$ i załóżmy, iż teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich trójek $({}^{\sim}s', {}^{\rightarrow}t', {}^{\forall}w') \prec ({}^{\sim}s, {}^{\rightarrow}t, {}^{\forall}w)$. Niech $(\overline{a};\overline{b})$ będzie takim odwzorowaniem pomiędzy światami K_α i M_β, że $(\overline{a};\overline{b})\colon \alpha \sim_{s,t,w} \beta$.

Ustalmy taką formułę $\varphi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\varphi) \preceq ({}^{\sim}s, {}^{\rightarrow}t, {}^{\forall}w)$. Zauważmy, iż musimy jedynie rozważyć przypadki, gdy formuła $\varphi(\overline{x})$ jest postaci $\sim \psi(\overline{x})$, $(\psi_1 \rightarrow \psi_2)(\overline{x})$ oraz $\forall_y \psi(\overline{x}, y)$.

(ii) Niech $\varphi(\overline{x}) = \sim \psi(\overline{x})$, gdzie $s\text{-}char(\psi) \preceq ({}^{\sim}s-1, {}^{\rightarrow}t, {}^{\forall}w)$. Na początek załóżmy, że $\alpha \Vdash^P \sim \psi(\overline{a})$. Z definicji wymuszania

$$\alpha \Vdash^P \sim \psi(\overline{a}) \iff \alpha \Vdash^N \psi(\overline{a}).$$

Z założenia $(\overline{a};\overline{b})\colon \alpha \sim^{P}_{s,t,w} \beta$, więc $(\overline{a};\overline{b})\colon \alpha \sim^{N}_{s-1,t,w} \beta$. Korzystając z założenia indukcyjnego dla $\sim^N$, otrzymamy

$$\beta \Vdash^N \psi(\overline{b}) \iff \beta \Vdash^P \sim \psi(\overline{b}).$$

Teraz załóżmy, że $\alpha \Vdash^N \sim \psi(\overline{a})$. Z definicji wymuszania

$$\alpha \Vdash^N \sim \psi(\overline{a}) \iff \alpha \Vdash^P \psi(\overline{a}).$$

Z założenia $(\overline{a};\overline{b})\colon \alpha \sim^{N}_{s,t,w} \beta$, więc $(\overline{a};\overline{b})\colon \alpha \sim^{P}_{s-1,t,w} \beta$. Korzystając z założenia indukcyjnego dla $\sim^{P}$ mamy

$$\beta \Vdash^{P} \psi(\overline{b}) \iff \beta \Vdash^{N} \sim \psi(\overline{b}).$$

(iii) Niech teraz $\varphi(\overline{x}) = (\psi_1 \to \psi_2)(\overline{x})$, gdzie $s\text{-}char(\psi_1), s\text{-}char(\psi_2) \preceq (^{\sim}s, {}^{\to}t-1, {}^{\forall}w)$. Załóżmy najpierw, że

$$\alpha \Vdash^{P} (\psi_1 \to \psi_2)(\overline{a}). \tag{3.1}$$

Ustalmy dowolny punkt $\beta' \geqslant \beta$ taki, że

$$\beta' \Vdash^{P} \psi_1(\overline{b}).$$

Z warunku $(\to\text{-zag})^{P}$ dla każdego punktu $\beta' \geqslant \beta$ istnieje punkt $\alpha' \geqslant \alpha$ taki, że $(\overline{a};\overline{b})\colon \alpha' \sim^{P}_{s,t-1,w} \beta'$. Zatem z założenia indukcyjnego dla $\sim^{P}$ otrzymujemy

$$\alpha' \Vdash^{P} \psi_1(\overline{a}),$$

a z (3.1) także

$$\alpha' \Vdash^{P} \psi_2(\overline{a}).$$

Korzystając ponownie z założenia indukcyjnego mamy

$$\beta' \Vdash^{P} \psi_2(\overline{b}).$$

Wobec dowolności punktu $\beta' \geqslant \beta$ otrzymujemy

$$\beta \Vdash^{P} (\psi_1 \to \psi_2)(\overline{b}).$$

Analogiczne rozumowanie z punktu $\beta \in \mathcal{M}$ do punktu $\alpha \in \mathcal{K}$ przeprowadzamy za pomocą warunku $(\to\text{-zig})^{P}$.

Następnie załóżmy, że

$$\alpha \Vdash^{N} (\psi_1 \to \psi_2)(\overline{a}).$$

To znaczy, iż

$$\alpha \Vdash^{P} \psi_1(\overline{a}) \qquad \text{oraz} \qquad \alpha \Vdash^{N} \psi_2(\overline{a}).$$

Z założenia $(\overline{a};\overline{b})\colon \alpha \sim^{N}_{s,t,w} \beta$, a więc na mocy definicji ograniczonej bisymulacji $(\overline{a};\overline{b})\colon \alpha \sim^{P}_{s,t-1,w} \beta$ oraz $(\overline{a};\overline{b})\colon \alpha \sim^{N}_{s,t-1,w} \beta$. Stąd, oraz z założenia indukcyjnego dla $\sim^{P}$ i $\sim^{N}$, otrzymujemy

$$\beta \Vdash^{P} \psi_1(\overline{b}) \qquad \text{oraz} \qquad \beta \Vdash^{N} \psi_2(\overline{b}).$$

A zatem
$$\beta \Vdash^N (\psi_1 \to \psi_2)(\bar{b}).$$

(iv) Na koniec rozważmy przypadek, gdy formuła $\varphi(\bar{x}) = \forall_y \psi(\bar{x}, y)$, gdzie $s\text{-}char(\psi) \preceq ({}^{\sim}s, {}^{\to}t, {}^{\forall}w - 1)$. Załóżmy, że
$$\alpha \Vdash^P \forall_y \psi(\bar{a}, y). \tag{3.2}$$
Ustalmy dowolny punkt $\beta' \geqslant \beta$ oraz element $b \in M_{\beta'}$. Warunek $(\forall\text{-zag})^P$ mówi, iż dla każdego $\beta' \geqslant \beta$ i każdego $b \in M_{\beta'}$ istnieją $\alpha' \geqslant \alpha$ i $a \in K_{\alpha'}$ takie, że
$$(\bar{a}; \bar{b}) \cup \{(a, b)\} \colon \alpha' \sim^P_{s,t,w-1} \beta'.$$
W szczególności, z (3.2) mamy
$$\alpha' \Vdash^P \psi(\bar{a}, a).$$
A zatem, z założenia indukcyjnego dla $\sim^P$, otrzymamy
$$\beta' \Vdash^P \psi(\bar{b}, b),$$
a stąd
$$\beta \Vdash^P \forall_y \psi(\bar{b}, y).$$
Analogicznie, wnioskowanie wychodzące z punktu $\beta \in \mathcal{M}$ do punktu $\alpha \in \mathcal{K}$ uzasadniamy za pomocą warunku $(\forall\text{-zig})^P$.

Aby zakończyć dowód załóżmy, iż
$$\alpha \Vdash^N \forall_y \psi(\bar{a}, y).$$
To znaczy dla pewnego elementu $a \in K_\alpha$ mamy
$$\alpha \Vdash^N \psi(\bar{a}, a).$$
Warunek $(\forall\text{-zig})^N$ mówi, iż
$$\forall_{a \in K_\alpha} \exists_{b \in M_\beta} \quad (\bar{a}; \bar{b}) \cup \{(a, b)\} \colon \alpha \sim^N_{s,t,w-1} \beta.$$
Zatem, korzystając z założenia indukcyjnego dla $\sim^N$, dla pewnego elementu $b \in M_\beta$ otrzymujemy
$$\beta \Vdash^N \psi(\bar{b}, b),$$
a stąd
$$\beta \Vdash^N \forall_y \psi(\bar{b}, y).$$
Tak jak poprzednio, należy jeszcze uwzględnić rozumowanie z punktu $\beta \in \mathcal{M}$ do punktu $\alpha \in \mathcal{K}$. Cel ten realizujemy korzystając z warunku $(\forall\text{-zag})^N$. $\square$

Wniosek 3.2. *Rozważmy punkty α i β modeli Kripkego $\mathcal{K}$ oraz $\mathcal{M}$, odpowiednio. Załóżmy, że $s, t, w \geqslant 0$, a $(\overline{a}; \overline{b})$ jest takim odwzorowaniem pomiędzy światami K_α i M_β, że dla pewnej bisymulacji $\sim\ = \{\sim^P, \sim^N\}$ mamy $(\overline{a}; \overline{b})\colon \alpha \sim_{s,t,w} \beta$. Wówczas*

$$(\alpha, \overline{a}) \equiv_{s,t,w} (\beta, \overline{b}).$$

Naturalnym pytaniem jest czy implikacja odwrotna do powyższej w Twierdzeniu 3.1 również zachodzi. Tak jak w Rozdziale 2 należy spodziewać się pewnych dodatkowych założeń dotyczących modeli Kripkego. Na początek, skończoną sygnaturę języka będziemy rozpatrywać bez symboli funkcyjnych. Ponadto, rozważać będziemy silnie skończone modele Kripkego. Zdefiniujmy jeszcze pojęcie skończonej N-nasyconości modeli Kripkego.

Definicja 3.3. Punkt α modelu Kripkego $\mathcal{K}$ nazywamy *skończenie N-nasyconym* względem klasy formuł Γ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary formuł $\varphi(x), \psi(x) \in \Gamma$, jeśli istnieją model Kripkego $\mathcal{M}$ oraz taki punkt β modelu $\mathcal{M}$, że

$$\alpha \equiv^N_\Gamma \beta,$$

a także taki element $b \in M_\beta$, że

$$\beta \Vdash^N \varphi(b) \quad \text{i} \quad \beta \nVdash^N \psi(b),$$

to istnieje wówczas taki element $a \in K_\alpha$, że

$$\alpha \Vdash^N \varphi(a) \quad \text{i} \quad \alpha \nVdash^N \psi(a).$$

Model Kripkego $\mathcal{K}$ będziemy nazywać *skończenie N-nasyconym* względem klasy formuł Γ, gdy wszystkie jego punkty są skończenie N-nasycone względem Γ.

Uwzględniając powyższe założenia możemy udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.4. *Rozważmy silnie skończone modele Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$. Niech $s, t, w \geqslant 0$. Ponadto, niech $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ będą modelami skończenie N-nasyconymi względem klasy formuł*

$$\Gamma = \{\varphi(\overline{x})\colon s\text{-}char(\varphi) \preceq ({}^{\sim}s + t + w, {}^{\rightarrow}t + w, {}^{\forall}w)\}.$$

Rozważmy dowolne punkty α i β modeli $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, odpowiednio, oraz dowolne ciągi $\overline{a}$ i $\overline{b}$ elementów światów K_α i M_β, odpowiednio. Wówczas, jeśli

$$(\alpha, \overline{a}) \equiv_\Gamma (\beta, \overline{b}),$$

to

$$(\overline{a};\overline{b})\colon \alpha \sim_{s,t,w} \beta$$

dla pewnej bisymulacji $\sim$*.*

Dowód. Ustalmy punkty α i β silnie skończonych modeli Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$. Niech K_α i M_β będą skończonymi światami przypisanymi do tych punktów. Ustalmy ponadto ciągi $\overline{a}$ i $\overline{b}$ elementów światów K_α i M_β, odpowiednio. Zakładamy, iż $(\alpha,\overline{a}) \equiv_\Gamma (\beta,\overline{b})$, to znaczy

$$\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{a}) \iff \beta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(\overline{b})$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\varphi) \preceq ({}^{\sim}s+t+w, {}^{\to}t+w, {}^{\forall}w)$. Ustalmy dowolne punkty $\gamma \geqslant \alpha$ oraz $\delta \geqslant \beta$ dostępne z α i β oraz dowolne ciągi $\overline{c}$ i $\overline{d}$ elementów światów K_γ oraz M_δ, odpowiednio. Relację $\sim\; = \{\sim^P, \sim^N\}$ definiujemy dla $0 \leqslant i \leqslant s$, $0 \leqslant j \leqslant t$, $0 \leqslant k \leqslant w$ w następujący sposób:

$$(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim^P_{i,j,k} \delta \iff (\gamma \Vdash^P \varphi(\overline{c}) \Leftrightarrow \delta \Vdash^P \varphi(\overline{d}))$$

oraz

$$(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim^N_{i,j,k} \delta \iff (\gamma \Vdash^N \varphi(\overline{c}) \Leftrightarrow \delta \Vdash^N \varphi(\overline{d}))$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\varphi) \preceq ({}^{\sim}i+j+k, {}^{\to}j+k, {}^{\forall}k)$. Indukcyjnie względem i,j,k udowodnimy iż $\sim$ $\{\sim^P, \sim^N\}$ jest ograniczoną bisymulacją.

(i) Na początek załóżmy, że $(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim^P_{0,0,0} \delta$.To znaczy

$$\gamma \Vdash^P \phi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash^P \phi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\phi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\phi) \preceq ({}^{\sim}0, {}^{\to}0, {}^{\forall}0)$. W szczególności dla dowolnej formuły atomowej $\psi(\overline{x})$ mamy

$$\gamma \Vdash^P \psi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash^P \psi(\overline{d}),$$

co oznacza, że odwzorowanie $(\overline{c};\overline{d})$ jest częściowym P-izomorfizmem pomiędzy strukturami K_γ i M_δ.

(ii) Załóżmy, że $(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim^N_{0,0,0} \delta$. To znaczy

$$\gamma \Vdash^N \phi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash^N \phi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\phi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\phi) \preceq ({}^{\sim}0, {}^{\to}0, {}^{\forall}0)$. W szczególności dla dowolnej formuły atomowej $\psi(\overline{x})$ mamy

$$\gamma \Vdash^N \psi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash^N \psi(\overline{d}),$$

co oznacza, że odwzorowanie $(\overline{c};\overline{d})$ jest częściowym N-izomorfizmem pomiędzy strukturami K_γ i M_δ.

Następnie zakładamy, iż teza twierdzenia zachodzi dla pewnych $(i,j,k) \succeq (^{\sim}0,^{\rightarrow}0,^{\forall}0)$.

(iii) Dla $i < s, j \leqslant t, k \leqslant w$ załóżmy, że $(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim^{P}_{i+1,j,k} \delta$, to znaczy

$$\gamma \Vdash^P \phi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash^P \phi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\phi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\phi) \preceq (^{\sim}i+j+k+1,^{\rightarrow}j+k,^{\forall}k)$. Aby wykazać, iż $(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim^{N}_{i,j,k} \delta$ przypuśćmy nie wprost istnienie takiej formuły $\varphi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\varphi) \preceq (^{\sim}i+j+k,^{\rightarrow}j+k,^{\forall}k)$ oraz

$$\gamma \Vdash^N \varphi(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \nVdash^N \varphi(\overline{d})$$

lub

$$\gamma \nVdash^N \varphi(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \Vdash^N \varphi(\overline{d}).$$

Korzystając z definicji relacji wymuszania dostaniemy

$$\gamma \Vdash^P \sim \varphi(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \nVdash^P \sim \varphi(\overline{d})$$

lub

$$\gamma \nVdash^P \sim \varphi(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \Vdash^P \sim \varphi(\overline{d}).$$

Ponieważ $s\text{-}char(\sim \varphi) \preceq (^{\sim}i+j+k+1,^{\rightarrow}j+k,^{\forall}k)$, otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, iż

$$\gamma \Vdash^P \phi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash^P \phi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\phi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\phi) \preceq (^{\sim}i+j+k+1,^{\rightarrow}j+k,^{\forall}k)$.

(iv) Następnie dla $i < s, j \leqslant t, k \leqslant w$ zakładamy, że $(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim^{N}_{i+1,j,k} \delta$, to znaczy

$$\gamma \Vdash^N \phi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash^N \phi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\phi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\phi) \preceq (^{\sim}i+j+k+1,^{\rightarrow}j+k,^{\forall}k)$. Aby wykazać, iż także $(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim^{P}_{i,j,k} \delta$ przypuśćmy, że istnieje taka formuła $\psi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\psi) \preceq (^{\sim}i+j+k,^{\rightarrow}j+k,^{\forall}k)$ oraz

$$\gamma \Vdash^P \psi(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \nVdash^P \psi(\overline{d})$$

lub

$$\gamma \nVdash^P \psi(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \Vdash^P \psi(\overline{d}).$$

Korzystając ponownie z definicji wymuszania dostaniemy

$$\gamma \Vdash^N \sim \psi(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \nVdash^N \sim \psi(\overline{d})$$

lub

$$\gamma \nVdash^N \sim \psi(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \Vdash^N \sim \psi(\overline{d}).$$

Zauważmy, że $s\text{-}char(\sim \psi) \preceq ({}^{\sim}i+j+k+1, {}^{\rightarrow}j+k, {}^{\forall}k)$. A zatem, ponownie otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, zgodnie z którym

$$\gamma \Vdash^N \phi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash^N \phi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\phi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\phi) \preceq ({}^{\sim}i+j+k+1, {}^{\rightarrow}j+k, {}^{\forall}k)$.

(v) Dla $i \leqslant s, j < t, k \leqslant w$ załóżmy, że $(\overline{c}; \overline{d})\colon \gamma \sim^P_{i,j+1,k} \delta$. Czyli

$$\gamma \Vdash^P \phi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash^P \phi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\phi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\phi) \preceq ({}^{\sim}i+j+k+1, {}^{\rightarrow}j+k+1, {}^{\forall}k)$. Zweryfikujemy własność $(\rightarrow\text{-zig})^P$. Należy więc pokazać, że

$$\forall \gamma' \geqslant \gamma \; \exists \delta' \geqslant \delta \; \Big(\gamma' \Vdash^P \varphi(\overline{c}) \iff \delta' \Vdash^P \varphi(\overline{d})\Big)$$

dla wszystkich formuł $\varphi(\overline{x})$, dla których $s\text{-}char(\varphi) \preceq ({}^{\sim}i+j+k, {}^{\rightarrow}j+k, {}^{\forall}k)$.

Przypuśćmy nie wprost, iż istnieje taki punkt $\gamma' \geqslant \gamma$, że dla każdego punktu $\delta' \geqslant \delta$ znajdziemy taką formułę $\varphi_{\delta'}(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\varphi_{\delta'}) \preceq ({}^{\sim}i+j+k, {}^{\rightarrow}j+k, {}^{\forall}k)$ oraz

$$(\gamma' \Vdash^P \varphi_{\delta'}(\overline{c}) \text{ i } \delta' \nVdash^P \varphi_{\delta'}(\overline{d}))$$

lub

$$(\gamma' \nVdash^P \varphi_{\delta'}(\overline{c}) \text{ i } \delta' \Vdash^P \varphi_{\delta'}(\overline{d})).$$

Oznaczmy przez Θ zbiór wszystkich formuł $\varphi_{\delta'}(\overline{x})$ wybranych w powyższy sposób. Ponieważ punkty $\delta' \geqslant \delta$ przebiegają skończony model Kripkego $\mathcal{M}$, więc zbiór Θ także jest skończony. Rozważmy dwa następujące podzbiory zbioru Θ,

$$\Theta_0 = \{\varphi_{\delta'}(\overline{x}) \in \Theta\colon \gamma' \Vdash^P \varphi_{\delta'}(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta' \nVdash^P \varphi_{\delta'}(\overline{d})\}$$

oraz

$$\Theta_1 = \{\varphi_{\delta'}(\overline{x}) \in \Theta\colon \gamma' \nVdash^P \varphi_{\delta'}(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta' \Vdash^P \varphi_{\delta'}(\overline{d})\}.$$

Zauważmy, że zbiory Θ_0 oraz Θ_1 nie mogą być jednocześnie puste. Rozważmy najpierw przypadek, gdy $\Theta_1 = \emptyset$. Wówczas, jak łatwo zauważyć

$$\gamma' \Vdash^P \bigwedge \Theta_0(\overline{c}).$$

A więc
$$\gamma \nVdash^P \neg \bigwedge \Theta_0(\overline{c}).$$
Ponadto dla wszystkich $\delta' \geqslant \delta$
$$\delta' \nVdash^P \bigwedge \Theta_0(\overline{d}).$$
To znaczy, że
$$\delta \Vdash^P \neg \bigwedge \Theta_0(\overline{d}),$$
co jest sprzeczne z naszym założeniem, gdyż $s\text{-}char(\neg \bigwedge \Theta_0) \preceq ({}^{\sim} i + j + k + 1, {}^{\rightarrow} j + k + 1, {}^{\forall} k)$.

Natomiast, gdy $\Theta_0 = \emptyset$, otrzymujemy
$$\gamma' \nVdash^P \bigvee \Theta_1(\overline{c}).$$
Stąd
$$\gamma \nVdash^P \bigvee \Theta_1(\overline{c}).$$
Dodatkowo
$$\delta' \Vdash^P \bigvee \Theta_1(\overline{d})$$
dla wszystkich $\delta' \geqslant \delta$. Więc, w szczególności,
$$\delta \Vdash^P \bigvee \Theta_1(\overline{d}).$$
Ale ponieważ $s\text{-}char(\bigvee \Theta_1) \preceq ({}^{\sim} i + j + k + 1, {}^{\rightarrow} j + k + 1, {}^{\forall} k)$, otrzymujemy natychmiast sprzeczność z założeniem.

Pozostaje rozważyć przypadek, gdy $\Theta_0 \neq \emptyset$ oraz $\Theta_1 \neq \emptyset$. Zauważmy, że
$$\gamma' \Vdash^P \bigwedge \Theta_0(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \gamma' \nVdash^P \bigvee \Theta_1(\overline{c}) \tag{3.3}$$
oraz
$$\delta' \nVdash^P \bigwedge \Theta_0(\overline{d}) \quad \text{lub} \quad \delta' \Vdash^P \bigvee \Theta_1(\overline{d}) \tag{3.4}$$
dla wszystkich $\delta' \geqslant \delta$. Rozważmy więc formułę $(\bigwedge \Theta_0 \rightarrow \bigvee \Theta_1)(\overline{x})$. Zauważmy najpierw, że $s\text{-}char\Big(\bigwedge \Theta_0 \rightarrow \bigvee \Theta_1\Big) \preceq ({}^{\sim} i + j + k + 1, {}^{\rightarrow} j + k + 1, {}^{\forall} k)$. Z (3.3) otrzymujemy
$$\gamma \nVdash^P (\bigwedge \Theta_0 \rightarrow \bigvee \Theta_1)(\overline{c}),$$
natomiast z (3.4)
$$\delta \Vdash^P (\bigwedge \Theta_0 \rightarrow \bigvee \Theta_1)(\overline{d}),$$
co jest sprzeczne z założeniem, iż
$$\gamma \Vdash^P \phi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash^P \phi(\overline{d})$$

dla wszystkich formuł $\phi(\overline{x})$, dla których $s\text{-}char(\phi) \preceq ({}^{\sim}i+j+k+1, {}^{\rightarrow}j+k+1, {}^{\forall}k)$.

(vi) Następnie dla $i \leqslant s, j < t, k \leqslant w$ załóżmy, że $(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim^{N}_{i,j+1,k} \delta$, to znaczy

$$\gamma \Vdash^{N} \phi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash^{N} \phi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\phi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\phi) \preceq ({}^{\sim}i+j+k+1, {}^{\rightarrow}j+k+1, {}^{\forall}k)$ Należy wykazać, że $(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim^{P}_{i,j,k} \delta$ oraz $(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim^{N}_{i,j,k} \delta$. Najpierw przypuśćmy nie wprost, iż istnieje takia formuła $\varphi'(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\varphi') \preceq ({}^{\sim}i+j+k, {}^{\rightarrow}j+k, {}^{\forall}k)$ oraz

$$\gamma \Vdash^{P} \varphi'(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \nVdash^{P} \varphi'(\overline{d})$$

lub

$$\gamma \nVdash^{P} \varphi'(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \Vdash^{P} \varphi'(\overline{d}).$$

Wówczas, korzystając z definicji wymuszania, otrzymamy

$$\gamma \Vdash^{N} \neg\varphi'(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \nVdash^{N} \neg\varphi'(\overline{d})$$

lub

$$\gamma \nVdash^{N} \neg\varphi'(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \Vdash^{N} \neg\varphi'(\overline{d}).$$

Ponieważ $s\text{-}char(\neg\varphi') \preceq ({}^{\sim}i+j+k+1, {}^{\rightarrow}j+k+1, {}^{\forall}k)$, otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, iż

$$\gamma \Vdash^{N} \phi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash^{N} \phi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\phi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\phi) \preceq ({}^{\sim}i+j+k+1, {}^{\rightarrow}j+k+1, {}^{\forall}k)$.

Następnie przypuśćmy, iż istnieje taka formuła $\psi'(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\psi') \preceq ({}^{\sim}i+j+k, {}^{\rightarrow}j+k, {}^{\forall}k)$ oraz

$$\gamma \Vdash^{N} \psi'(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \nVdash^{N} \psi'(\overline{d})$$

lub

$$\gamma \nVdash^{N} \psi'(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \Vdash^{N} \psi'(\overline{d}).$$

Korzystając ponownie z definicji wymuszania dostaniemy

$$\gamma \Vdash^{P} \sim \psi'(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \nVdash^{P} \sim \psi'(\overline{d})$$

lub

$$\gamma \nVdash^{P} \sim \psi'(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \Vdash^{P} \sim \psi'(\overline{d}).$$

A stąd

$$\gamma \Vdash^N \neg \sim \psi'(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \nVdash^N \neg \sim \psi'(\overline{d})$$

lub

$$\gamma \nVdash^N \neg \sim \psi'(\overline{c}) \quad \text{i} \quad \delta \Vdash^N \neg \sim \psi'(\overline{d}).$$

A zatem, ponownie otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, gdyż $s\text{-}char(\neg \sim \psi') \preceq ({}^{\sim}i + j + k + 1, {}^{\to} j + k + 1, {}^{\forall} k)$.

(vii) Dla $i \leqslant s, j \leqslant t, k < w$ załóżmy, że $(\overline{c}; \overline{d})\colon \gamma \sim^P_{i,j,k+1} \delta$, tzn.

$$\gamma \Vdash^P \phi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash^P \phi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\phi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\phi) \preceq ({}^{\sim}i + j + k + 1, {}^{\to} j + k + 1, {}^{\forall} k + 1)$. Aby zweryfikować własność $(\forall\text{-zig})^P$, wystarczy pokazać, że dla każdego punktu $\gamma' \geqslant \gamma$ i każdego elementu $c \in K_{\gamma'}$ istnieją punkt $\delta' \geqslant \delta$ oraz element $d \in M_{\delta'}$ takie, że

$$\gamma' \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{c}, c) \iff \delta' \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(\overline{d}, d)$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\varphi) \preceq ({}^{\sim}i + j + k, {}^{\to} j + k, {}^{\forall} k)$. Dla uproszczenia będziemy pomijać parametry $\overline{c}$ i $\overline{d}$.

Przypuśćmy nie wprost, iż istnieje taki punkt $\gamma' \geqslant \gamma$ i taki element $c \in K_{\gamma'}$, że dla każdego punkt $\delta' \geqslant \delta$ oraz każdego elementu $d \in M_{\delta'}$ istnieje taka formuła $\varphi_{\delta',d}(x)$, że $s\text{-}char(\varphi_{\delta',d}) \preceq ({}^{\sim}i + j + k, {}^{\to} j + k, {}^{\forall} k)$ oraz

$$(\gamma' \Vdash^P \varphi_{\delta',d}(c) \quad \text{i} \quad \delta' \nVdash^P \varphi_{\delta',d}(d))$$

lub

$$(\gamma' \nVdash^P \varphi_{\delta',d}(c) \quad \text{i} \quad \delta' \Vdash^P \varphi_{\delta',d}(d)).$$

Jak poprzednio, przez Θ oznaczamy zbiór wszystkich formuł $\varphi_{\delta',d}(x)$, które zostały wybrane w powyższy sposób. Ponieważ punkty $\delta' \geqslant \delta$ oraz elementy d przebiegają, odpowiednio, skończony model Kripkego $\mathcal{M}$ oraz skończoną strukturę $M_{\delta'}$, więc zbiór Θ także jest skończony. Rozważmy dwa następujące podzbiory zbioru Θ,

$$\Theta_0 = \{\varphi_{\delta',d}(x) \in \Theta \colon \gamma' \Vdash^P \varphi_{\delta',d}(c) \quad \text{i} \quad \delta' \nVdash^P \varphi_{\delta',d}(d)\}$$

oraz

$$\Theta_1 = \{\varphi_{\delta',d}(x) \in \Theta \colon \gamma' \nVdash^P \varphi_{\delta',d}(c) \quad \text{i} \quad \delta' \Vdash^P \varphi_{\delta',d}(d)\}.$$

Najpierw rozważmy przypadek, gdy $\Theta_1 = \emptyset$. Wówczas

$$\gamma' \Vdash^P \bigwedge \Theta_0(c).$$

Stąd, jak łatwo zauważyć

$$\gamma' \nVdash^P \neg \bigwedge \Theta_0(c).$$

Ponieważ punkt $\gamma' \geqslant \gamma$ oraz element $c \in K_{\gamma'}$ były ustalone, więc otrzymujemy

$$\gamma \nVdash^P \forall_x \neg \theta(x).$$

Ponadto, dla każdego $\delta' \geqslant \delta$ oraz każdego $d \in M_{\delta'}$ mamy

$$\delta' \nVdash^P \bigwedge \Theta_0(d),$$

co oznacza, że

$$\delta' \Vdash^P \neg \bigwedge \Theta_0(d)$$

dla każdego punktu $\delta' \geqslant \delta$ oraz każdego elementu $d \in M_{\delta'}$. A zatem

$$\delta \Vdash^P \forall_x \neg \bigwedge \Theta_0(x),$$

co jest sprzeczne z naszym założeniem, gdyż $s\text{-}char(\forall_x \neg \bigwedge \Theta_0) \preceq (^{\sim} i + j + k + 1, ^{\rightarrow} j + k + 1, ^{\forall} k + 1)$.

Natomiast kiedy $\Theta_0 = \emptyset$, otrzymujemy

$$\gamma' \nVdash^P \bigvee \Theta_1(c).$$

A stąd

$$\gamma \nVdash^P \forall_x \bigvee \Theta_1(x).$$

Dodatkowo dla wszystkich $\delta' \geqslant \delta$ oraz wszystkich $d \in M_{\delta'}$

$$\delta' \Vdash^P \bigvee \Theta_1(d).$$

Więc

$$\delta \Vdash^P \forall_x \bigvee \Theta_1(x).$$

Ale ponieważ $s\text{-}char(\forall_x \bigvee \Theta_1) \preceq (^{\sim} i+j+k+1, ^{\rightarrow} j+k+1, ^{\exists} k+1)$, otrzymujemy sprzeczność z założeniem.

Tak jak w poprzedniej części dowodu, pozostaje rozważyć przypadek, gdy $\Theta_0 \neq \emptyset$ oraz $\Theta_1 \neq \emptyset$. Ponieważ

$$\gamma' \Vdash^P \bigwedge \Theta_0(c) \quad \text{i} \quad \gamma' \nVdash^P \bigvee \Theta_1(c),$$

otrzymujemy

$$\gamma \nVdash^P \forall_y (\bigwedge \Theta_0 \rightarrow \bigvee \Theta_1)(y).$$

Ponadto, dla każdego punktu $\delta' \geqslant \delta$ oraz każdego $d \in M_{\delta'}$

$$\delta' \nVdash^P \bigwedge \Theta_0(d) \quad \text{lub} \quad \delta' \Vdash^P \bigvee \Theta_1(d),$$

więc otrzymujemy

$$\delta \Vdash^P \forall_y(\bigwedge \Theta_0 \to \bigvee \Theta_1)(y).$$

Ale $s\text{-}char\Big(\forall_y(\bigwedge \Theta_0 \to \bigvee \Theta_1)\Big) \preceq ({}^{\sim}i+j+k+1, {}^{\to}j+k+1, {}^{\forall}k+1)$, więc otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że $(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim_{i,j,k+1} \delta$.

$(viii)$ Aby zakończyć dowód, dla $i \leqslant s, j \leqslant t, k < w$, załóżmy, że $(\overline{c};\overline{d})\colon \gamma \sim^N_{i,j,k+1} \delta$, tzn.

$$\gamma \Vdash^N \phi(\overline{c}) \iff \delta \Vdash^N \phi(\overline{d})$$

dla wszystkich takich formuł $\phi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\phi) \preceq ({}^{\sim}i+j+k+1, {}^{\to}j+k+1, {}^{\forall}k+1)$. Należy jeszcze zweryfikować własność $(\forall\text{-zig})^N$. Musimy więc pokazać, że

$$\forall c \in K_\gamma\ \exists d \in M_\delta\ \Big(\gamma \Vdash^N \varphi(\overline{c}, c) \iff \delta \Vdash^N \varphi(\overline{d}, d)\Big)$$

dla wszystkich takich formuł $\varphi(\overline{x})$, że $s\text{-}char(\varphi) \preceq ({}^{\sim}i+j+k, {}^{\to}j+k, {}^{\forall}k)$. Ponownie, dla uproszczenia będziemy pomijać parametry $\overline{c}$ i $\overline{d}$.

Przypuśćmy nie wprost, iż istnieje taki element $c \in K_\gamma$, że dla każdego elementu $d \in M_\delta$ istnieje taka formuła $\psi_d(x)$, że $s\text{-}char(\psi_d) \preceq ({}^{\sim}i+j+k, {}^{\to}j+k, {}^{\forall}k)$ oraz

$$(\gamma \Vdash^N \psi_d(c) \quad \text{i} \quad \delta \nVdash^N \psi_d(d))$$

$$\text{lub}$$

$$(\gamma \nVdash^N \psi_d(c) \quad \text{i} \quad \delta \Vdash^N \psi_d(d)).$$

Niech Λ będzie zbiorem wszystkich takich formuł $\psi_d(x)$. Z założenia klasyczna struktura M_δ jest skończona, więc zbiór Λ także jest skończony. Rozważmy więc dwa następujące podzbiory zbioru Λ,

$$\Lambda_0 = \{\psi_d(x) \in \Lambda\colon \gamma \Vdash^N \psi_d(c) \quad \text{i} \quad \delta \nVdash^N \psi_d(d)\}$$

oraz

$$\Lambda_1 = \{\psi_d(x) \in \Lambda\colon \gamma \nVdash^N \psi_d(c) \quad \text{i} \quad \delta \Vdash^N \psi_d(d)\}.$$

Dodatkowo, zdefiniujmy następujące podzbiory struktury M_δ

$$S_0 = \{d \in M_\delta\colon \psi_d \in \Lambda_0\},$$

$$S_1 = \{d \in M_\delta\colon \psi_d \in \Lambda_1\}.$$

Zauważmy najpierw, że dla dowolnego elementu $d \in M_\delta$

$$d \in S_0 \iff \delta \nVdash^N \bigvee \Lambda_0(d) \tag{3.5}$$

oraz

$$d \in S_1 \iff \delta \Vdash^N \bigwedge \Lambda_1(d). \tag{3.6}$$

Zwróćmy jeszcze uwagę, iż zgodnie z założeniem $S_0 \cup S_1 = M_\delta$.

W przypadku, gdy $\Lambda_1 = \emptyset$ otrzymamy

$$\gamma \Vdash^N \bigvee \Lambda_0(c).$$

A stąd

$$\gamma \Vdash^N \forall_x \bigvee \Lambda_0(x).$$

Ponadto, dla każdego elementu $d \in M_\delta$

$$\delta \nVdash^N \bigvee \Lambda_0(d).$$

Zatem

$$\delta \nVdash^N \forall_x \bigvee \Lambda_0(x).$$

Zauważmy, iż $s\text{-}char(\forall_x \bigvee \Lambda_0) \preceq ({}^{\sim}i + j + k + 1, {}^{\rightarrow} j + k + 1, {}^{\exists} k + 1)$, co daje sprzeczność z założeniem, iż $(\overline{c}; \overline{d})\colon \gamma \sim_{i,j,k+1} \delta$.

W przypadku, gdy $\Lambda_0 = \emptyset$ otrzymamy $M_\delta = S_1$. Przez $\chi(x) \in \Gamma$ oznaczmy dowolną formułę obalaną w intuicjonistycznej logice predykatów z silną negacją. Wówczas

$$\gamma \Vdash^N \chi(c) \quad \text{i} \quad \gamma \nVdash^N \bigwedge \Lambda_1(c).$$

Z założenia $\gamma \equiv_{i+j+k+1, j+k+1, k+1} \delta$. A ponieważ punkt δ jest skończenie N-nasycony względem Γ, istnieje więc taki element $d \in M_\delta$, że

$$\delta \Vdash^N \chi(d) \quad \text{i} \quad \delta \nVdash^N \bigwedge \Lambda_1(d).$$

A zatem, z (3.6), otrzymujemy $d \notin S_1 = M_\delta$, co daje sprzeczność.

Na koniec rozważmy przypadek, gdy $\Lambda_0 \neq \emptyset$ oraz $\Lambda_1 \neq \emptyset$. Wtedy

$$\gamma \Vdash^N \bigvee \Lambda_0(c) \quad \text{i} \quad \gamma \nVdash^N \bigwedge \Lambda_1(c).$$

Z założenia $\gamma \equiv_{i+j+k+1, j+k+1, k+1} \delta$. Dodatkowo $s\text{-}char(\bigvee \Lambda_0), s\text{-}char(\bigwedge \Lambda_1) \preceq ({}^{\sim}i + j + k, {}^{\rightarrow} j + k, {}^{\forall} k)$, czyli $\bigvee \Lambda_0, \bigwedge \Lambda_1 \in \Gamma$. Ponieważ punkt δ jest skończenie N-nasycony względem Γ, istnieje taki element $d \in M_\delta$, że

$$\delta \Vdash^N \bigvee \Lambda_0(d) \quad \text{i} \quad \delta \nVdash^N \bigwedge \Lambda_1(d).$$

Zatem, z (3.5) oraz (3.6), otrzymujemy

$$d \notin S_0 \quad \text{i} \quad d \notin S_1.$$

Stąd $S_0 \cup S_1 \neq M_\delta$, co jest sprzeczne z naszym założeniem. □

Rozdział 4

Gry dla modeli Kripkego dla IQC

Kolejnym krokiem w badaniach nad ograniczoną bisymulacją modeli Kripkego jest przedstawienie tego pojęcia w języku teorii gier. W tym celu zaprezentujemy definicję gry na modelach Kripkego dla IQC.

4.1 Wprowadzenie pojęcia gry

Zanim przedstawimy definicję gry, należy zaznajomić się z pojęciem konfiguracji odgrywającym ważną rolę w dalszych rozważaniach. Niech $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ będą dowolnymi modelami Kripkego dla IQC. Rozważmy punkty $\alpha \in K$ oraz $\beta \in M$ tych modeli, odpowiednio, oraz relację (ewentualnie pustą) $\pi \subseteq K_\alpha \times M_\beta$. Ponadto, niech $i, j, k \geqslant 0$. Wówczas *konfiguracją* nazywamy następujący układ

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k).$$

Jeśli $i = j = k = 0$ konfigurację nazywamy *końcową* i oznaczymy w skrócie (α, β, π). Mówimy, że konfiguracja $(\alpha', \beta', \pi', i', j', k')$ *wynika* z konfiguracji $(\alpha, \beta, \pi, i, j, k)$, gdy $\alpha \leqslant^f \alpha'$, $\beta \leqslant^g \beta'$, $\pi \subseteq \pi'$ oraz $(i, j, k) \preceq (i', j', k')$.

Teraz jesteśmy gotowi wprowadzić główne pojęcie tego rozdziału. Ustalmy $p, q, r \geqslant 0$. Przedstawimy definicję *gry na modelach Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ o konfiguracji początkowej* $P = (\alpha_0, \beta_0, \pi_0, p, q, r)$, którą będziemy oznaczać symbolem $G_P(\mathcal{K}, \mathcal{M})$.

Na początku gry rozważamy dwa punkty α_0 oraz β_0 modeli Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, odpowiednio. Ustalone jest także odwzorowanie $\pi_0 = (\overline{a}; \overline{b})$, gdzie $\overline{a}$ i $\overline{b}$ są ciągami elementów struktur K_{α_0} i M_{β_0}, odpowiednio. Gra rozgrywana jest pomiędzy dwoma graczami, $\forall$BELARDEM i $\exists$LOISE, którzy grają naprzemiennie. Dostępne są trzy rodzaje ruchów, a liczba wystąpień każdego z nich określona jest przez trójkę (p, q, r) z konfiguracji początkowej P. $\forall$BELARD zawsze wykonuje pierwszy ruch danej rozgrywki. Najpierw wybiera on model

Kripkego $\mathcal{K}$ lub $\mathcal{M}$, a następnie albo świat tego modelu, albo element świata, albo też świat i element do niego należący. Następnie $\exists$LOISE musi wykonać analogiczny ruch w drugim modelu Kripkego. Należy tutaj zaznaczyć, iż w każdym z modeli możliwy jest wybór jedynie tych światów, które dostępne są ze świata aktualnego. Ponadto, każdy z graczy ma pełną informację o historii ruchów wykonanych do tej pory, zarówno swoich jak i oponenta. Stosując terminologię teorii gier, jest to *gra z doskonałą informacją*. Podczas gry odwzorowanie π_0 jest rozszerzane poprzez dodanie nowych par elementów oraz przeniesienie do innych światów przy pomocy odpowiednich morfizmów.

Przystąpimy teraz do dokładnego opisu dopuszczalnych w grze ruchów. Na początku rozgrywki mamy ustaloną konfigurację początkową $(\alpha_0, \beta_0, \pi_0, p, q, r)$. Załóżmy, iż bieżącą konfiguracją rozgrywki jest

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k).$$

Na tym etapie $\forall$BELARD może wykonać jeden z następujących ruchów,

- Typ $\rightarrow$
  $\forall$BELARD wybiera model Kripkego $\mathcal{K}$ oraz taki punkt α', że $\alpha \leqslant^f \alpha'$; $\exists$LOISE musi odpowiedzieć wyborem takiego punktu β' modelu $\mathcal{M}$, że $\beta \leqslant^g \beta'$. Lub też $\forall$BELARD wybiera model Kripkego $\mathcal{M}$ oraz punkt β' taki, że $\beta \leqslant^g \beta'$; $\exists$LOISE musi odpowiedzieć wyborem takiego punktu α' modelu $\mathcal{K}$, że $\alpha \leqslant^f \alpha'$.

  Po tym ruchu nową konfiguracją jest $(\alpha', \beta', \pi^{f,g}, i-1, j, k)$.

- Typ $\forall$
  $\forall$BELARD wybiera model $\mathcal{K}$, punkt α' taki, że $\alpha \leqslant^f \alpha'$ oraz element $a \in K_{\alpha'}$; $\exists$LOISE odpowiada wybierając taki punktu β' modelu $\mathcal{M}$, że $\beta \leqslant^g \beta'$ oraz element $b \in M_{\beta'}$. Lub też $\forall$BELARD wybiera model $\mathcal{M}$, punkt β' taki, że $\beta \leqslant^g \beta'$ oraz element $b \in M_{\beta'}$; $\exists$LOISE odpowiada wybierając taki punktu α' modelu $\mathcal{K}$, że $\alpha \leqslant^f \alpha'$ oraz element $a \in K_{\alpha'}$.

  Po tym ruchu nową konfiguracją jest $(\alpha', \beta', \pi^{f,g} \cup \{(a, b)\}, i, j-1, k)$.

- Typ $\exists$
  $\forall$BELARD wybiera model $\mathcal{K}$ oraz element $a \in K_\alpha$; $\exists$LOISE odpowiada wybierając model $\mathcal{M}$ oraz element $b \in M_\beta$. Lub też $\forall$BELARD wybiera model $\mathcal{M}$ oraz element $b \in M_\beta$; $\exists$LOISE odpowiada wybierając model $\mathcal{K}$ oraz element $a \in K_\alpha$.

  Po tym ruchu nową konfiguracją jest $(\alpha, \beta, \pi \cup \{(a, b)\}, i, j, k-1)$.

Podczas gry $G_P(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ o konfiguracji początkowej $P = (\alpha_0, \beta_0, \pi_0, p, q, r)$ każdy z graczy wykonuje dokładnie p ruchów typu $\rightarrow$, q ruchów typu $\forall$ oraz

r ruchów typu $\exists$. Konfiguracja końcowa gry jest wówczas postaci $(\alpha^*, \beta^*, \pi^*)$. Mówimy, że $\exists$LOISE *wygrywa grę*, gdy odwzorowanie $\pi^* \colon K_{\alpha^*} \to M_{\beta^*}$ jest częściowym izomorfizmem pomiędzy klasycznymi strukturami K_{α^*} i M_{β^*}. W przeciwnym razie mówimy, że $\forall$BELARD wygrywa grę. Będziemy też mówić, że gracz posiada *strategię wygrywającą* w grze, jeśli, przestrzegając wskazanej strategii, gracz ten wygrywa każdą rozgrywkę.

4.2 Bisymulacje a Gry Modeli Kripkego

Ustalimy teraz relację łączącą pojęcie gry $G_P(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ z pojęciem bisymulacji modeli Kripkego $\mathcal{K}$ oraz $\mathcal{M}$. Mianowicie, pokażemy iż istnieje ścisła zależność pomiędzy bisymulacją a strategią wygrywającą dla $\exists$LOISE.

Lemat 4.1. *Jeśli $\exists$LOISE posiada strategię wygrywającą w grze $G_P(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ o konfiguracji początkowej $P = (\alpha_0, \beta_0, \pi_0, p, q, r)$, to wówczas istnieje taka bisymulacja $\sim$ modeli Kripkego $\mathcal{K}$ oraz $\mathcal{M}$, że*

$$\pi_0 \colon \alpha_0 \sim_{p,q,r} \beta_0.$$

Dowód. Oznaczmy przez $\mathcal{W}$ zbiór wszystkich konfiguracji występujących w strategii wygrywającej dla $\exists$LOISE. Z założenia zbiór $\mathcal{W}$ jest niepusty. Ustalmy dowolne punkty $\alpha \geqslant \alpha_0$ oraz $\beta \geqslant \beta_0$ modeli Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, odpowiednio, oraz odwzorowanie $\pi \subseteq K_\alpha \times M_\beta$. Relację $\sim$ definiujemy dla $0 \leqslant i \leqslant p$, $0 \leqslant j \leqslant q$, $0 \leqslant k \leqslant r$ w następujący sposób,

$$\pi \colon \alpha \sim_{i,j,k} \beta \iff (\alpha, \beta, \pi, i, j, k) \in \mathcal{W}. \tag{4.1}$$

Pokażemy, że tak określona relacja $\sim$ jest (p, q, r)-bisymulacją.

(i) Załóżmy najpierw, że $\pi \colon \alpha \sim_{0,0,0} \beta$. Z definicji (4.1) wynika, że (α, β, π) jest konfiguracją końcową w grze wygranej przez $\exists$LOISE. Zatem, z definicji gry $G_P(\mathcal{K}, \mathcal{M})$, π jest częściowym izomorfizmem pomiędzy klasycznymi strukturami K_α i M_β.

(ii) Następnie załóżmy, że

$$\pi \colon \alpha \sim_{i+1,j,k} \beta.$$

Wówczas konfiguracja

$$(\alpha, \beta, \pi, i+1, j, k) \tag{4.2}$$

jest jedną z konfiguracji strategii wygrywającej $\exists$LOISE. Zweryfikujemy warunek ($\to$ -zig). Ustalmy więc dowolny punkt α' modelu $\mathcal{K}$ taki, że $\alpha \leqslant^f$

α'. Tak wybrany punkt możemy uważać za ruch typu $\rightarrow$ wykonany przez $\forall$BELARDA przy konfiguracji (4.2). Na podstawie swojej strategii wygrywającej $\exists$LOISE potrafi wybrać taki punkt β' modelu $\mathcal{M}$, że $\beta \leqslant^g \beta'$ oraz

$$(\alpha', \beta', \pi^{f,g}, i, j, k) \in \mathcal{W}.$$

Powołując się na (4.1) otrzymamy

$$\pi^{f,g} \colon \alpha' \sim_{i,j,k} \beta',$$

więc warunek ($\rightarrow$ -zig) jest spełniony.

(*iii*) Zweryfikujemy teraz warunek ($\forall$-zig). Załóżmy, że

$$\pi \colon \alpha \sim_{i,j+1,k} \beta.$$

Wówczas konfiguracja

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j+1, k) \tag{4.3}$$

występuje w strategii wygrywającej dla $\exists$LOISE. Ustalmy teraz taki punkt α' modelu $\mathcal{K}$, że $\alpha \leqslant^f \alpha'$ oraz element $a \in K_{\alpha'}$. Tak wybrany punkt α' i element $a \in K_{\alpha'}$ możemy rozważać jako ruch typu $\forall$ wykonany przez $\forall$BELARDA przy konfiguracji (4.3). Korzystając ze swojej strategii wygrywającej, $\exists$LOISE może wybrać taki punkt $\beta \leqslant^g \beta'$ modelu $\mathcal{M}$ oraz element $b \in M_{\beta'}$, że

$$(\alpha', \beta', \pi^{f,g} \cup \{(a,b)\}, i, j, k) \in \mathcal{W}.$$

A zatem, z (4.1), otrzymamy

$$\pi^{f,g} \cup \{(a,b)\} \colon \alpha' \sim_{i,j,k} \beta',$$

co pokazuje, iż warunek ($\forall$-zig) jest spełniony.

(*iv*) Na zakończenie załóżmy, że

$$\pi \colon \alpha \sim_{i,j,k+1} \beta.$$

To znaczy, że konfiguracja

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k+1) \tag{4.4}$$

jest jedną z konfiguracji strategii wygrywającej $\exists$LOISE. Zweryfikujemy warunek ($\exists$-zig). Ustalmy dowolny element $a \in K_\alpha$. Element ten możemy uważać za ruch typu $\exists$ wykonany przez $\forall$BELARDA przy konfiguracji (4.4).

Wówczas, zgodnie ze swoją strategią wygrywającą, ∃LOISE potrafi wybrać taki element $b \in M_\beta$, że

$$(\alpha, \beta, \pi \cup \{(a, b)\}, i, j, k) \in \mathcal{W}.$$

Z (4.1) otrzymamy wówczas

$$\pi \cup \{(a, b)\} \colon \alpha \sim_{i,j,k} \beta,$$

co pokazuje, iż warunek (∃-zig) jest spełniony. □

Lemat 4.2. *Rozważmy punkty α_0 i β_0 modeli Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, odpowiednio. Niech π_0 będzie odwzorowaniem pomiędzy strukturami K_{α_0} i M_{β_0}. Załóżmy, że $\pi_0 \colon \alpha_0 \sim_{p,q,r} \beta_0$ dla pewnej bisymulacji $\sim$. Wówczas ∃LOISE posiada strategię wygrywającą w dowolnej grze $G_P(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ o konfiguracji początkowej $P = (\alpha_0, \beta_0, \pi_0, p, q, r)$.*

Dowód. Oznaczmy przez $\mathcal{S}$ zbiór wszystkich takich konfiguracji, że

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k) \in \mathcal{S} \iff \pi \colon \alpha \sim_{i,j,k} \beta.$$

Określimy teraz strategię wygrywającą dla ∃LOISE w grze $G_P(\mathcal{K}, \mathcal{M})$. Mianowicie, ∃LOISE musi odpowiadać na ruchy ∀BELARDA w ten sposób, aby każda z konfiguracji rozgrywki była elementem zbioru $\mathcal{S}$.

Pokażemy najpierw, że ∃LOISE potrafi zawsze wykonać ruch zgodny z określoną powyżej strategią. Z założenia $\pi_0 \colon \alpha_0 \sim_{p,q,r} \beta_0$, więc konfiguracja początkowa P jest elementem zbioru $\mathcal{S}$.

Następnie załóżmy, że dla pewnych $0 \leqslant i \leqslant p$, $0 \leqslant j \leqslant q$, $0 \leqslant k \leqslant r$ bieżącą konfiguracją jest $(\alpha, \beta, \pi, i, j, k)$ oraz

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k) \in \mathcal{S}.$$

Najpierw dla $i < p$ rozważmy przypadek, gdy ∀BELARD wybiera ruch typu $\rightarrow$ wskazując taki punkt α' modelu $\mathcal{K}$, że $\alpha \leqslant^f \alpha'$. Z założenia indukcyjnego

$$\pi \colon \alpha \sim_{i,j,k} \beta,$$

zatem, korzystając z definicji ograniczonej bisymulacji, znajdziemy taki punkt β' modelu $\mathcal{M}$, że $\beta \leqslant^g \beta'$ oraz

$$\pi^{f,g} \colon \alpha' \sim_{i-1,j,k} \beta'.$$

Na mocy definicji zbioru $\mathcal{S}$ otrzymamy

$$(\alpha', \beta', \pi^{f,g}, i-1, j, k) \in \mathcal{S}.$$

Następnie dla $j < q$ rozważmy przypadek, gdy $\forall$BELARD wybiera ruch typu $\forall$ wskazując punkt $\alpha \leqslant^f \alpha'$ modelu $\mathcal{K}$ oraz element $a \in K_{\alpha'}$. Z założenia indukcyjnego

$$\pi\colon \alpha \sim_{i,j,k} \beta,$$

więc, na mocy definicji ograniczonej bisymulacji, istnieje taki punkt $\beta \leqslant^g \beta'$ modelu $\mathcal{M}$ oraz element $b \in M_{\beta'}$, że

$$\pi^{f,g} \cup \{(a,b)\}\colon \alpha' \sim_{i,j-1,k} \beta'.$$

Z definicji zbioru $\mathcal{S}$ wynika, że

$$(\alpha', \beta', \pi^{f,g} \cup \{(a,b)\}, i, j-1, k) \in \mathcal{S}.$$

Dla $k < r$ rozważmy jeszcze przypadek, gdy $\forall$BELARD wybiera ruch typu $\exists$ wskazując model $\mathcal{K}$ i element $a \in K_\alpha$. Korzystając ponownie z założenia indukcyjnego otrzymamy

$$\pi\colon \alpha \sim_{i,j,k} \beta.$$

A więc, na mocy definicji ograniczonej bisymulacji, w modelu $\mathcal{M}$ istnieje taki element $b \in M_\beta$, że

$$\pi \cup \{(a,b)\}\colon \alpha \sim_{i,j,k-1} \beta.$$

Z definicji zbioru $\mathcal{S}$ wynika więc, że

$$(\alpha, \beta, \pi \cup \{(a,b)\}, i, j, k-1) \in \mathcal{S}.$$

Na koniec, niech

$$(\alpha^*, \beta^*, \pi^*) \tag{4.5}$$

będzie konfiguracją końcową rozgrywki, w której $\exists$LOISE przestrzegała wskazanej strategii. Wówczas konfiguracja (4.5) jest elementem zbioru $\mathcal{S}$, a stąd

$$\pi^*\colon \alpha^* \sim_{0,0,0} \beta^*.$$

Korzystając z definicji ograniczonej bisymulacji wnosimy, iż odwzorowanie π^* jest częściowym izomorfizmem pomiędzy strukturami K_{α^*} i M_{β^*}. To oznacza, że $\exists$LOISE wygrywa grę.

A zatem powyższa strategia jest strategią wygrywającą dla $\exists$LOISE w grze $G_P(\mathcal{K}, \mathcal{M})$. $\square$

Z Lematu 4.1 oraz Lematu 4.2 otrzymujemy następujący fakt.

Twierdzenie 4.3. *$\exists$LOISE posiada strategię wyrywającą w grze $G_P(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ o konfiguracji początkowej $P = (\alpha_0, \beta_0, \pi_0, p, q, r)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bisymulacja $\sim$ modeli Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ taka, że $\pi_0\colon \alpha_0 \sim_{p,q,r} \beta_0$.*

Jak wiemy pojęcie bisymulacji stanowi strukturalny opis logicznej równoważności dwóch modeli Kripkego. Stąd też, łącząc powyższy wynik z Twierdzeniem 2.2 otrzymamy fakt następujący.

Twierdzenie 4.4. *Rozważmy modele Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ dla IQC, oraz punkty α i β tych modeli, odpowiednio. Niech $(\overline{a};\overline{b})$ będzie odwzorowaniem pomiędzy strukturami K_α i M_β. Wówczas, jeśli $\exists$LOISE posida strategię wygrywającą w grze $G_P(\mathcal{K},\mathcal{M})$ o konfiguracji początkowej $P = (\alpha, \beta, (\overline{a};\overline{b}), p, q, r)$, to*

$$\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi(\overline{a}) \iff \beta \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi(\overline{b})$$

dla każdej takiej formuły $\varphi(\overline{x})$, że $char(\varphi) \preceq ({}^{\to}p, {}^{\forall}q, {}^{\exists}r)$.

W szczególności, jeśli dla każdego $p, q, r \geqslant 0$ $\exists$LOISE posiada strategię wygrywającą w grze $G_P(\mathcal{K},\mathcal{M})$ o konfiguracji początkowej $P = (\alpha, \beta, \emptyset, p, q, r)$, to modele $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ są równoważne.

4.3 Związki z grą Ehrenfeuchta–Fraïsségo

Rozdział ten zakończymy pewnymi uwagami, które dotyczyć będą związków między pojęciem gry wprowadzonym powyżej i klasyczną grą Ehrenfeuchta–Fraïsségo. Przypomnimy najpierw pojęcie gry Ehrenfeuchta–Fraïsségo na klasycznych strukturach pierwszego rzędu A i B. Szczegółową definicję tego pojęcia przedstawiono w [5]. Gra rozgrywana jest w n ruchach między dwoma graczami, $\forall$BELARDEM i $\exists$LOISE. Pozycją początkową rozgrywki jest $(\overline{a};\overline{b})$. Na każdym etapie rozgrywki $\forall$BELARD wybiera strukturę A lub B oraz element wskazanej struktury. Z kolei $\exists$LOISE odpowiada wyborem elementu drugiej struktury. Po n ruchach obojga graczy otrzymujemy ciągi $\overline{c} = c_1, \ldots, c_n$ i $\overline{d} = d_1, \ldots, d_n$ elementów struktur A i B, odpowiednio. Mówimy, że $\exists$LOISE wygrywa grę, gdy $(\overline{ac};\overline{bd})$ jest częściowym izomorfizmem pomiędzy A i B. Grę opisaną powyżej oznaczać będziemy symbolem $EF_n(A,B)$. Fundamentalnym wynikiem dotyczącym gier Ehrenfeuchta–Fraïsségo jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.5. *(Ehrenfeucht–Fraïssé) Jeśli $\exists$LOISE posiada strategię wygrywającą w dowolnej grze $EF_n(A,B)$ o pozycji początkowej $(\overline{a};\overline{b})$, to*

$$A \models \varphi(\overline{a}) \iff B \models \varphi(\overline{b})$$

dla każdej formuły $\varphi(\overline{x})$ o złożoności kwantyfikatorowej co najwyżej n.

Zauważmy najpierw, że pojęcie modelu Kripkego może być traktowane jako uogólnienie pojęcia klasycznej struktury pierwszego rzędu. Mianowicie, każda klasyczna struktura może być rozważana jako model Kripkego nad trywialną kategorią. Rozważmy więc grę na modelach Kripkego w właśnie tym przypadku. Jak łatwo zobaczyć ruch typu $\rightarrow$ jest tutaj zbyteczny, a ruch typu $\forall$ redukowalny jest do ruchu typu $\exists$. Dodatkowo, ruch $\exists$ jest taki sam jak ruch w grze Ehrenfeuchta–Fraïsségo na klasycznych strukturach. Tak więc, pojęcie gry na modelach Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ złożonych z pojedynczych światów o konfiguracji początkowej $(A, B, (\overline{a}; \overline{b}), p, q, r)$ redukuje się do pojęcia gry Ehrenfeuchta–Fraïsségo $EF_{q+r}(A, B)$ o pozycji początkowej $(\overline{a}; \overline{b})$.

Ponadto zauważmy, że jeśli charakterystyka formuły φ wynosi $({}^{\rightarrow}p, {}^{\forall}q, {}^{\exists}r)$, to jej złożoność kwantyfikatorowa jest równa $q + r$. A zatem Twierdzenie 4.3 możemy rozpatrywać jako uogólnienie Twierdzenia Ehrenfeuchta–Fraïsségo.

Rozdział 5

Gry dla modeli Kripkego dla IQC+SN

Celem tej części rozprawy jest ujęcie ograniczonej bisymulacji w języku teorii gier. Przedstawimy definicję konfiguracji oraz wprowadzimy grę na modelach Kripkego dla IQC+SN. Następnie udowodnimy szereg faktów naświetlających związek pomiędzy grą modeli Kripkego a ograniczoną bisymulacją.

5.1 Pojęcie gry modeli Kripkego

Na początek ustalmy dowolne modele Kripkego $\mathcal{K}$ oraz $\mathcal{M}$ dla IQC+SN. Niech $\alpha \in K$ i $\beta \in M$ będą punktami tych modeli, odpowiednio, a $\pi \subseteq K_\alpha \times M_\beta$ relacją (dopuszczalna jest relacja pusta) pomiędzy światami K_α i M_β. Ponadto, niech $i, j, k \geqslant 0$. Wówczas *konfiguracją* nazywamy jeden z następujących dwóch układów

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k, P) \quad \text{lub} \quad (\alpha, \beta, \pi, i, j, k, N).$$

Tak więc, wyróżniamy *konfigurację pozytywną* oraz *konfigurację negatywną* . Gdy $i = j = k = 0$ konfigurację nazywamy *końcową* i oznaczamy w skrócie (α, β, π, P) lub (α, β, π, N).

Zaprezentujmy główne pojęcie tego rozdziału. Ustalmy $s, t, w \geqslant 0$. *Grę na modelach Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ o konfiguracji początkowej S* będziemy oznaczać symbolem $G_S(\mathcal{K}, \mathcal{M})$.

Rozważmy dwa punkty α_0 oraz β_0 modeli Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, odpowiednio. Ustalmy także odwzorowanie $\pi_0 = (\overline{a}; \overline{b})$, gdzie $\overline{a}$ i $\overline{b}$ są ciągami elementów światów K_{α_0} i M_{β_0}, odpowiednio. Grę prowadzi dwoje graczy, $\forall$BELARD i $\exists$LOISE, którzy grają naprzemiennie. Wyróżniamy trzy rodzaje ruchów, z których każdy posiada swój pozytywny i negatywny odpowiednik. Liczbę wystąpień każdego z nich determinuje trójka (s, t, w) z konfiguracji początkowej S. ∀BELARD zawsze wykonuje pierwszy ruch danej rozgrywki w wybranym przez siebie modelu Kripkego, po czym ∃LOISE musi wykonać analogiczny ruch w drugim modelu. W każdym z modeli możliwy jest wybór jedynie tych światów, które dostępne są ze świata aktualnego. W kolejnych krokach rozgrywki odwzorowanie π_0 jest rozszerzane poprzez dodawanie nowych par elementów. Ponadto, każdy z graczy posiada pełną informację o dotychczasowej historii ruchów, zarówno swoich jak i oponenta. Tak więc jest to *gra z doskonałą informacją.*

Opiszmy więc dokładnie dopuszczalne w grze ruchy. Rozgrywkę rozpoczynamy od ustalonej konfiguracji początkowej $(\alpha_0, \beta_0, \pi_0, s, t, w, P)$ lub $(\alpha_0, \beta_0, \pi_0, s, t, w, N)$. Rodzaj dopuszczalnych w grze ruchów uzależniony jest od typu konfiguracji bieżącej. Na początek, załóżmy, że bieżącą konfiguracją rozgrywki jest

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k, P).$$

Na tym etapie ∀BELARD może wykonać jeden z następujących ruchów,

(I) Typ $\sim$
∀BELARD dokonuje zamiany konfiguracji na przeciwną, ruch ∃LOISE jest bierny.

Po tym ruchu nową konfiguracją jest $(\alpha, \beta, \pi, i-1, j, k, N)$.

(II) Typ $\rightarrow$
∀BELARD wybiera model Kripkego $\mathcal{K}$ oraz taki punkt α', że $\alpha' \geqslant \alpha$; ∃LOISE musi odpowiedzieć wyborem takiego punktu β' modelu $\mathcal{M}$, że $\beta' \geqslant \beta$. Lub też ∀BELARD wybiera model Kripkego $\mathcal{M}$ oraz punkt β' taki, że $\beta' \geqslant \beta$; ∃LOISE musi odpowiedzieć wyborem takiego punktu α' modelu $\mathcal{K}$, że $\alpha' \geqslant \alpha$.

Po tym ruchu nową konfiguracją jest $(\alpha', \beta', \pi, i, j-1, k, P)$.

(III) Typ $\forall$
∀BELARD wybiera model $\mathcal{K}$, punkt α' taki, że $\alpha' \geqslant \alpha$ oraz element $a \in K_{\alpha'}$; ∃LOISE odpowiada wybierając taki punktu β' modelu $\mathcal{M}$, że $\beta' \geqslant \beta$ oraz element $b \in M_{\beta'}$. Lub też ∀BELARD wybiera model $\mathcal{M}$, punkt β' taki, że $\beta' \geqslant \beta$ oraz element $b \in M_{\beta'}$; ∃LOISE odpowiada wybierając taki punktu α' modelu $\mathcal{K}$, że $\alpha' \geqslant \alpha$ oraz element $a \in K_{\alpha'}$.

Po tym ruchu nową konfiguracją jest $(\alpha', \beta', \pi \cup \{(a, b)\}, i, j, k-1, P)$.

Następnie, załóżmy, iż bieżącą konfiguracją jest

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k, N).$$

Wówczas $\forall$BELARD może wykonać jeden z poniższych ruchów,

(I) Typ $\sim$
$\forall$BELARD dokonuje zamiany konfiguracji na przeciwną, ruch $\exists$LOISE jest bierny.

Po tym ruchu nową konfiguracją jest $(\alpha, \beta, \pi, i-1, j, k, P)$.

(II) Typ $\rightarrow$
$\forall$BELARD postanawia prowadzić dwie równoległe rozgrywki w trybie P i w trybie N, ruch $\exists$LOISE jest bierny.

Po tym ruchu drzewo rozgrywki rozgałęzia się. Otrzymujemy dwie nowe konfiguracje, $(\alpha, \beta, \pi, i, j-1, k, P)$ oraz $(\alpha, \beta, \pi, i, j-1, k, N)$.

(III) Typ $\forall$
$\forall$BELARD wybiera model $\mathcal{K}$ oraz element $a \in K_\alpha$; $\exists$LOISE odpowiada wybierając model $\mathcal{M}$ oraz element $b \in M_\beta$. Lub też $\forall$BELARD wybiera model $\mathcal{M}$ oraz element $b \in M_\beta$; $\exists$LOISE odpowiada wybierając model $\mathcal{K}$ oraz element $a \in K_\alpha$.

Po tym ruchu nową konfiguracją jest $(\alpha, \beta, \pi \cup \{(a, b)\}, i, j, k-1, N)$.

Podczas gry $G_S(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ o konfiguracji początkowej $S = (\alpha_0, \beta_0, \pi_0, s, t, w, P)$ lub $S = (\alpha_0, \beta_0, \pi_0, s, t, w, N)$ każdy z graczy wykonuje dokładnie s ruchów typu $\sim$, t ruchów typu $\rightarrow$ oraz w ruchów typu $\forall$. W odróżnieniu od koncepcji gry przedstawionej w Rozdziale 4, gra na modelach Kripkego dla IQC+SN nie jest liniowa. Przeciwnie, grę opisywaną powyżej przedstawić możemy za pomocą drzewa. Korzeniem drzewa jest wówczas konfiguracja początkowa S, natomiast liście drzewa to konfiguracje końcowe postaci $(\alpha^*, \beta^*, \pi^*, P)$ lub $(\alpha^*, \beta^*, \pi^*, N)$. Mówimy, że $\exists$LOISE *wygrywa grę*, gdy każde z odwzorowań postaci $\pi^* \colon K_{\alpha^*} \rightarrow M_{\beta^*}$ jest częściowym P-izomorfizmem bądź częściowym N-izomorfizmem, odpowiednio, pomiędzy światami K_{α^*} i M_{β^*}. W przeciwnym razie mówimy, że $\forall$BELARD wygrywa grę. Będziemy też mówić, że gracz posiada *strategię wygrywającą* w grze, jeśli, przestrzegając wskazanej strategii, gracz ten wygrywa każdą rozgrywkę.

5.2 Bisymulacje a Gry Modeli Kripkego

Zasadniczym pytaniem jest związek pomiędzy pojęciem gry $G_S(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ a ograniczoną bisymulacją modeli Kripkego $\mathcal{K}$ oraz $\mathcal{M}$. Pokażemy, iż istnieje ścisła zależność pomiędzy bisymulacją a strategią wygrywającą dla $\exists$LOISE.

Lemat 5.1. *Jeśli ∃LOISE posiada strategię wygrywającą w grze* $G_S(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ *o konfiguracji początkowej* $S = (\alpha_0, \beta_0, \pi_0, s, t, w, P)$*, to wówczas istnieje taka bisymulacja* $\sim\, = \{\sim^P, \sim^N\}$ *modeli Kripkego* $\mathcal{K}$ *oraz* $\mathcal{M}$*, że*

$$\pi_0 \colon \alpha_0 \sim^P_{s,t,w} \beta_0.$$

Dowód. Niech $\mathcal{W}$ będzie zbiorem wszystkich konfiguracji występujących w strategii wygrywającej dla ∃LOISE. Z założenia zbiór $\mathcal{W}$ jest niepusty. Ustalmy dowolne punkty $\alpha \geqslant \alpha_0$ oraz $\beta \geqslant \beta_0$ modeli Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, odpowiednio, oraz odwzorowanie $\pi \subseteq K_\alpha \times M_\beta$. Relację $\sim\, = \{\sim^P, \sim^N\}$ definiujemy w następujący sposób. Dla $0 \leqslant i \leqslant s$, $0 \leqslant j \leqslant t$, $0 \leqslant k \leqslant w$

$$\pi \colon \alpha \sim^P_{i,j,k} \beta \iff (\alpha, \beta, \pi, i, j, k, P) \in \mathcal{W} \tag{5.1}$$

oraz, dla $0 \leqslant i' \leqslant s$, $0 \leqslant j' \leqslant t$, $0 \leqslant k' \leqslant w$,

$$\pi \colon \alpha \sim^N_{i',j',k'} \beta \iff (\alpha, \beta, \pi, i', j', k', N) \in \mathcal{W}, \tag{5.2}$$

przy czym trójka $(i', j', k') \neq (s, t, w)$. Pokażemy, że tak określona relacja $\sim$ jest (s, t, w)-bisymulacją.

(i) Na początek załóżmy, że $\pi \colon \alpha \sim^P_{0,0,0} \beta$. Z definicji (5.1) wynika, że (α, β, π, P) jest konfiguracją końcową w grze wygranej przez ∃LOISE. Zatem, z definicji gry $G_S(\mathcal{K}, \mathcal{M})$, π jest częściowym P-izomorfizmem pomiędzy światami K_α i M_β.

(ii) Następnie zakładamy, że $\pi \colon \alpha \sim^N_{0,0,0} \beta$. Korzystając z definicji (5.2) konfiguracja (α, β, π, N) jest konfiguracją końcową w grze wygranej przez ∃LOISE. Z definicji gry $G_S(\mathcal{K}, \mathcal{M})$, π jest częściowym N-izomorfizmem pomiędzy światami K_α i M_β.

(iii) W kolejnym kroku zakładamy, że

$$\pi \colon \alpha \sim^P_{i+1,j,k} \beta.$$

Wówczas konfiguracja

$$(\alpha, \beta, \pi, i+1, j, k, P) \tag{5.3}$$

jest jedną z konfiguracji strategii wygrywającej ∃LOISE. Nasze rozważania uważać możemy za ruch typu $\sim$ wykonany przez ∀BELARDA przy konfiguracji (5.3). ∀BELARD dokonuje zamiany bieżącej konfiguracji na konfigurację przeciwną, $(\alpha, \beta, \pi, i, j, k, N)$, przy czym

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k, N) \in \mathcal{W}.$$

Powołując się na (5.2) otrzymamy

$$\pi\colon \alpha \sim^{N}_{i,j,k} \beta.$$

(iv) Następnie rozważmy przypadek, gdy

$$\pi\colon \alpha \sim^{N}_{i+1,j,k} \beta.$$

Wówczas konfiguracja

$$(\alpha, \beta, \pi, i+1, j, k, N) \tag{5.4}$$

należy do zbioru konfiguracji strategii wygrywającej ∃LOISE. Tak jak poprzednio, nasze rozważania uważać możemy za ruch typu $\sim$ wykonany przez ∀BELARDA przy konfiguracji (5.4). ∀BELARD zmienia tryb bieżącej konfiguracji na przeciwny. Zgodnie ze strategią wygrywającą dla ∃LOISE otrzymujemy konfigurację $(\alpha, \beta, \pi, i, j, k, P)$ taką, że

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k, P) \in \mathcal{W}.$$

Powołując się na (5.1) otrzymamy

$$\pi\colon \alpha \sim^{P}_{i,j,k} \beta.$$

(v) Zweryfikujemy teraz warunek $(\rightarrow\text{-zig})^P$. Załóżmy, że

$$\pi\colon \alpha \sim^{P}_{i,j+1,k} \beta.$$

Wówczas konfiguracja

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j+1, k, P) \tag{5.5}$$

jest jedną z konfiguracji strategii wygrywającej ∃LOISE. Ustalmy dowolny punkt α' modelu $\mathcal{K}$ taki, że $\alpha' \geqslant \alpha$. Tak wybrany punkt możemy uważać za ruch typu $\rightarrow$ wykonany przez ∀BELARDA przy konfiguracji (5.5). Na podstawie swojej strategii wygrywającej ∃LOISE potrafi wybrać taki punkt β' modelu $\mathcal{M}$, że $\beta' \geqslant \beta$ oraz

$$(\alpha', \beta', \pi, i, j, k, P) \in \mathcal{W}.$$

Zgodnie z (5.1) otrzymamy

$$\pi\colon \alpha' \sim^{P}_{i,j,k} \beta',$$

więc warunek $(\rightarrow\text{-zig})^P$ jest spełniony.

(vi) Aby zweryfikować własność $(\rightarrow)^N$ załóżmy, że

$$\pi\colon \alpha \sim^N_{i,j+1,k} \beta.$$

Wówczas konfiguracja

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j+1, k, N) \tag{5.6}$$

należy do zbioru konfiguracji strategii wygrywającej ∃LOISE. Rozważamy ruch typu → wykonany przez ∀BELARDA przy konfiguracji (5.6). ∀BELARD postanawia prowadzić dwie równoległe rozgrywki, w trybie P oraz w trybie N. W trybie P nową konfiguracją jest $(\alpha, \beta, \pi, i, j, k, P)$, natomiast w trybie N nowa konfiguracja to $(\alpha, \beta, \pi, i, j, k, N)$. Ponadto,

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k, P) \in \mathcal{W} \quad \text{oraz} \quad (\alpha, \beta, \pi, i, j, k, N) \in \mathcal{W}.$$

Powołując się na (5.1) oraz (5.2) otrzymamy

$$\pi\colon \alpha \sim^P_{i,j,k} \beta \quad \text{oraz} \quad \pi\colon \alpha \sim^N_{i,j,k} \beta.$$

A więc warunek $(\rightarrow)^N$ jest spełniony.

(vii) Następnie załóżmy, że

$$\pi\colon \alpha \sim^P_{i,j,k+1} \beta.$$

Wówczas konfiguracja

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k+1, P) \tag{5.7}$$

występuje w strategii wygrywającej dla ∃LOISE. Aby zweryfikować własność $(\forall\text{-zig})^P$ ustalmy taki punkt α' modelu $\mathcal{K}$, że $\alpha' \geqslant \alpha$ oraz element $a \in K_{\alpha'}$. Tak wybrany punkt α' i element $a \in K_{\alpha'}$ możemy rozważać jako ruch typu ∀ wykonany przez ∀BELARDA przy konfiguracji (5.7). Korzystając ze swojej strategii wygrywającej, ∃LOISE wybiera taki punkt $\beta' \geqslant \beta$ modelu $\mathcal{M}$ oraz element $b \in M_{\beta'}$, że

$$(\alpha', \beta', \pi \cup \{(a, b)\}, i, j, k, P) \in \mathcal{W}.$$

A zatem, z (5.1), otrzymamy

$$\pi \cup \{(a, b)\}\colon \alpha' \sim^P_{i,j,k} \beta',$$

co pokazuje, iż warunek $(\forall\text{-zig})^P$ jest spełniony.

$(viii)$ Aby zakończyć dowód załóżmy, że

$$\pi\colon \alpha \sim^N_{i,j,k+1} \beta.$$

Wówczas konfiguracja
$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k+1, N) \tag{5.8}$$
należy do zbioru konfiguracji strategii wygrywającej dla $\exists$LOISE. Należy zweryfikować warunek $(\forall\text{-zig})^N$. W tym celu ustalmy dowolny element $a \in K_\alpha$. Element ten możemy uważać za ruch typu $\forall$ wykonany przez $\forall$BELARDA przy konfiguracji (5.8). Wówczas, zgodnie ze swoją strategią wygrywającą, $\exists$LOISE potrafi wybrać taki element $b \in M_\beta$, że
$$(\alpha, \beta, \pi \cup \{(a,b)\}, i, j, k, N) \in \mathcal{W}.$$
Z (5.2) otrzymamy wówczas
$$\pi \cup \{(a,b)\} \colon \alpha \sim^N_{i,j,k} \beta,$$
co pokazuje, iż warunek $(\forall\text{-zig})^N$ jest spełniony. □

Powyższy lemat pozostaje prawdziwy również dla gier o negatywnej konfiguracji początkowej.

Lemat 5.2. *Jeśli $\exists$LOISE posiada strategię wygrywającą w grze $G_S(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ o konfiguracji początkowej $S = (\alpha_0, \beta_0, \pi_0, s, t, w, N)$, to wówczas istnieje taka bisymulacja $\sim = \{\sim^P, \sim^N\}$ modeli Kripkego $\mathcal{K}$ oraz $\mathcal{M}$, że*
$$\pi_0 \colon \alpha_0 \sim^N_{s,t,w} \beta_0.$$

Dowód. Dowód przebiega analogicznie jak dowód Lematu 5.1. □

Kolejnym etapem naszych badań nad grą $G_S(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ jest dowód implikacji odwrotnej.

Lemat 5.3. *Rozważmy punkty α_0 i β_0 modeli Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, odpowiednio. Niech π_0 będzie odwzorowaniem pomiędzy strukturami K_{α_0} i M_{β_0}. Załóżmy, że*
$$\pi_0 \colon \alpha_0 \sim^P_{s,t,w} \beta_0$$
dla pewnej bisymulacji $\sim = \{\sim^P, \sim^N\}$. Wówczas $\exists$LOISE posiada strategię wygrywającą w dowolnej grze $G_S(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ o konfiguracji początkowej $S = (\alpha_0, \beta_0, \pi_0, s, t, w, P)$.

Dowód. Rozważmy zbiór $\mathcal{S}$ wszystkich takich konfiguracji, że
$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k, P) \in \mathcal{S} \iff \pi \colon \alpha \sim^P_{i,j,k} \beta$$
lub

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k, N) \in \mathcal{S} \iff \pi\colon \alpha \sim^{N}_{i,j,k} \beta$$

Na początek należy określić strategię wygrywającą dla ∃LOISE w grze $G_S(\mathcal{K}, \mathcal{M})$. Mianowicie, ∃LOISE musi odpowiadać na ruchy ∀BELARDA w ten sposób, aby każda z konfiguracji rozgrywki była elementem zbioru $\mathcal{S}$.

Należy wykazać, że ∃LOISE zawsze potrafi wykonać ruch zgodny z określoną powyżej strategią. Z założenia $\pi_0\colon \alpha_0 \sim^{P}_{s,t,w} \beta_0$, więc konfiguracja początkowa $S = (\alpha_0, \beta_0, \pi_0, s, t, w, P)$ jest elementem zbioru $\mathcal{S}$.

Załóżmy teraz, że dla pewnych $0 \leqslant i \leqslant s$, $0 \leqslant j \leqslant t$, $0 \leqslant k \leqslant w$ bieżącą konfiguracją jest $(\alpha, \beta, \pi, i, j, k, P)$ oraz

$$(\alpha, \beta, \pi, i, j, k, P) \in \mathcal{S}.$$

Na początek, dla $i < s$, rozważmy przypadek, gdy ∀BELARD wybiera ruch typu $\sim$ dokonując zamiany bieżącej konfiguracji na konfigurację $(\alpha, \beta, \pi, i-1, j, k, N)$. Z założenia indukcyjnego

$$\pi\colon \alpha \sim^{P}_{i,j,k} \beta,$$

więc z definicji ograniczonej bisymulacji otrzymamy

$$\pi\colon \alpha \sim^{N}_{i-1,j,k} \beta,$$

a na mocy definicji zbioru $\mathcal{S}$

$$(\alpha, \beta, \pi, i-1, j, k, N) \in \mathcal{S}.$$

W kolejnym kroku dla $j < t$ rozważmy przypadek, gdy ∀BELARD wybiera ruch typu $\rightarrow$ wskazując taki punkt α' modelu $\mathcal{K}$, że $\alpha' \geqslant \alpha$. Z założenia indukcyjnego

$$\pi\colon \alpha \sim^{P}_{i,j,k} \beta,$$

zatem, korzystając z definicji ograniczonej bisymulacji, znajdziemy taki punkt β' modelu $\mathcal{M}$, że $\beta' \geqslant \beta$ oraz

$$\pi\colon \alpha' \sim^{P}_{i,j-1,k} \beta'.$$

Na mocy definicji zbioru $\mathcal{S}$ otrzymamy

$$(\alpha', \beta', \pi, i, j-1, k, P) \in \mathcal{S}.$$

Następnie dla $k < w$ rozważmy przypadek, gdy ∀BELARD wybiera ruch typu ∀ wskazując punkt $\alpha' \geqslant \alpha$ modelu $\mathcal{K}$ oraz element $a \in K_{\alpha'}$. Z założenia indukcyjnego

$$\pi\colon \alpha \sim^{P}_{i,j,k} \beta,$$

więc, na mocy definicji ograniczonej bisymulacji, istnieje taki punkt $\beta' \geqslant \beta$ modelu $\mathcal{M}$ oraz element $b \in M_{\beta'}$, że

$$\pi \cup \{(a,b)\}\colon \alpha' \sim^{P}_{i,j,k-1} \beta'.$$

Korzystając z definicji zbioru $\mathcal{S}$ otrzymamy

$$(\alpha', \beta', \pi \cup \{(a,b)\}, i, j, k-1, P) \in \mathcal{S}.$$

W kolejnym kroku dowodu załóżmy, że dla pewnych $0 \leqslant i' \leqslant s$, $0 \leqslant j' \leqslant t$, $0 \leqslant k' \leqslant w$ bieżącą konfiguracją jest $(\alpha, \beta, \pi, i', j', k', N)$ oraz

$$(\alpha, \beta, \pi, i', j', k', N) \in \mathcal{S},$$

przy czym trójka $(i', j', k') \neq (s, t, w)$.

Najpierw rozważmy przypadek, gdy $\forall$BELARD wybiera ruch typu $\sim$. Dokonuje on zamiany bieżącej konfiguracji na konfigurację $(\alpha, \beta, \pi, i'-1, j', k', P)$. Z założenia indukcyjnego

$$\pi\colon \alpha \sim^{N}_{i',j',k'} \beta,$$

więc

$$\pi\colon \alpha \sim^{P}_{i'-1,j',k'} \beta.$$

Z definicji zbioru $\mathcal{S}$ mamy

$$(\alpha, \beta, \pi, i'-1, j', k', P) \in \mathcal{S}.$$

W następnym kroku rozważamy przypadek, gdy $\forall$BELARD wybiera ruch typu $\rightarrow$. Postanawia on prowadzić dwie równoległe rozgrywki. W związku z tym otrzymujemy dwie konfiguracje,

$$(\alpha, \beta, \pi, i', j'-1, k', P) \quad \text{oraz} \quad (\alpha, \beta, \pi, i', j'-1, k', N).$$

Z założenia indukcyjnego

$$\pi\colon \alpha \sim^{N}_{i',j',k'} \beta,$$

więc otrzymamy

$$\pi\colon \alpha \sim^{P}_{i',j'-1,k'} \beta \quad \text{oraz} \quad \pi\colon \alpha \sim^{N}_{i',j'-1,k'} \beta.$$

Korzystając z definicji zbioru $\mathcal{S}$ dostaniemy

$$(\alpha, \beta, \pi, i', j'-1, k', P) \in \mathcal{S} \quad \text{oraz} \quad (\alpha, \beta, \pi, i', j'-1, k', N) \in \mathcal{S}.$$

Aby zakończyć dowód, rozpatrzmy jeszcze przypadek, gdy $\forall$BELARD wybiera ruch typu $\forall$ wskazując model $\mathcal{K}$ i element $a \in K_\alpha$. Korzystamy ponownie z założenia indukcyjnego

$$\pi\colon \alpha \sim^N_{i',j',k'} \beta.$$

A więc, na mocy definicji ograniczonej bisymulacji, w modelu $\mathcal{M}$ istnieje taki element $b \in M_\beta$, że

$$\pi \cup \{(a,b)\}\colon \alpha \sim^N_{i',j',k'-1} \beta.$$

Z definicji zbioru $\mathcal{S}$ wynika więc, że

$$(\alpha, \beta, \pi \cup \{(a,b)\}, i', j', k'-1, N) \in \mathcal{S}.$$

Na koniec, rozważmy konfigurację końcową rozgrywki

$$(\alpha^*, \beta^*, \pi^*, P) \quad \text{lub} \quad (\alpha^*, \beta^*, \pi^*, N), \tag{5.9}$$

w której $\exists$LOISE przestrzegała wskazanej strategii. Wówczas konfiguracja (5.9) jest elementem zbioru $\mathcal{S}$, a stąd

$$\pi^*\colon \alpha^* \sim^P_{0,0,0} \beta^* \quad \text{lub} \quad \pi^*\colon \alpha^* \sim^N_{0,0,0} \beta^*,$$

odpowiednio. Korzystając z definicji ograniczonej bisymulacji wnosimy, iż odwzorowanie π^* jest częściowym P-izomorfizmem bądź częściowym N-izomorfizmem pomiędzy światami K_{α^*} i M_{β^*}. To oznacza, że $\exists$LOISE wygrywa grę.

A zatem powyższa strategia jest strategią wygrywającą dla $\exists$LOISE w grze $G_S(\mathcal{K}, \mathcal{M})$. $\square$

Tak jak poprzednio, Lemat 5.3 pozostaje prawdziwy dla negatywnej części bisymulacji.

Lemat 5.4. *Rozważmy punkty α_0 i β_0 modeli Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$, odpowiednio. Niech π_0 będzie odwzorowaniem pomiędzy strukturami K_{α_0} i M_{β_0}. Załóżmy, że*

$$\pi_0\colon \alpha_0 \sim^N_{s,t,w} \beta_0$$

dla pewnej bisymulacji $\sim = \{\sim^P, \sim^N\}$. Wówczas $\exists$LOISE posiada strategię wygrywającą w dowolnej grze $G_S(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ o konfiguracji początkowej $S = (\alpha_0, \beta_0, \pi_0, s, t, w, N)$.

Uzyskaliśmy więc wzajemną jednoznaczność pomiędzy pojęciem gry a ograniczoną bisymulacją. Istotnie, z Lematu 5.1 oraz Lematu 5.3 otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.5. *$\exists$LOISE posiada strategię wyrywającą w grze $G_S(\mathcal{K},\mathcal{M})$ o konfiguracji początkowej $S = (\alpha_0, \beta_0, \pi_0, s, t, w, P)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bisymulacja $\sim = \{\sim^P, \sim^N\}$ modeli Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ taka, że $\pi_0\colon \alpha_0 \sim^P_{s,t,w} \beta_0$.*

Natomiast z Lematu 5.2 oraz Lematu 5.4 dostajemy poniższy fakt.

Twierdzenie 5.6. *$\exists$LOISE posiada strategię wyrywającą w grze $G_S(\mathcal{K},\mathcal{M})$ o konfiguracji początkowej $S = (\alpha_0, \beta_0, \pi_0, s, t, w, N)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bisymulacja $\sim = \{\sim^P, \sim^N\}$ modeli Kripkego $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ taka, że $\pi_0\colon \alpha_0 \sim^N_{s,t,w} \beta_0$.*

W Rozdziale 3 dowodziliśmy związków pomiędzy pojęciem logicznej równoważności a ograniczoną bisymulacją. Stąd też, łącząc powyższe wyniki z Twierdzeniem 3.1 otrzymamy następujące dwa fakty.

Twierdzenie 5.7. *Rozważmy modele Kripkego $\mathcal{K}$ oraz $\mathcal{M}$ dla IQC+SN, oraz punkty α i β tych modeli, odpowiednio. Niech $(\overline{a};\overline{b})$ będzie odwzorowaniem pomiędzy światami K_α i M_β. Wówczas, jeśli $\exists$LOISE posida strategię wygrywającą w grze $G_S(\mathcal{K},\mathcal{M})$ o konfiguracji początkowej $S = (\alpha, \beta, (\overline{a};\overline{b}), s, t, w, P)$, to*

$$\alpha \Vdash^P \varphi(\overline{a}) \iff \beta \Vdash^P \varphi(\overline{b})$$

dla każdej takiej formuły $\varphi(\overline{x})$, że s-char$(\varphi) \preceq ({}^{\sim}s, {}^{\rightarrow}t, {}^{\forall}w)$.

Twierdzenie 5.8. *Rozważmy modele Kripkego $\mathcal{K}$ oraz $\mathcal{M}$ dla IQC+SN, oraz punkty α i β tych modeli, odpowiednio. Niech $(\overline{a};\overline{b})$ będzie odwzorowaniem pomiędzy światami K_α i M_β. Wówczas, jeśli $\exists$LOISE posida strategię wygrywającą w grze $G_S(\mathcal{K},\mathcal{M})$ o konfiguracji początkowej $S = (\alpha, \beta, (\overline{a};\overline{b}), s, t, w, N)$, to*

$$\alpha \Vdash^N \varphi(\overline{a}) \iff \beta \Vdash^N \varphi(\overline{b})$$

dla każdej takiej formuły $\varphi(\overline{x})$, że s-char$(\varphi) \preceq ({}^{\sim}s, {}^{\rightarrow}t, {}^{\forall}w)$.

Bibliografia

[1] D.M. Gabbay, D. Skvortsov, and V. Shehtman. *Quantification in Nonclassical Logic*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier Science, 2009.

[2] G. Gentzen. Untersuchungen fiber das logische schliessen. *Mathematische Zeitschrift*, 39(I,II):176–210,405–431, 1935.

[3] S. Görnemann. A logic stronger than intuitionism. *The Journal of Symbolic Logic*, 36(2):249–261, 1971.

[4] A. Heyting. Die formalen regeln der intuitionistischen logik. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie von Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse*, 37:42–56, 1930.

[5] W. Hodges. *A Shorter Model Theory*. Cambridge University Press, 1997.

[6] S. Kripke. Semantical considerations on modal and intuitionistic logic. *Acta Philosophica Fennica*, 16:83–94, 1963.

[7] M. Kruszelnicka. A note on bisimulations of finite Kripke models. *Bulletin of the Section of Logic*, 41(3-4):185–198, 2012.

[8] A.A. Markov. Konstruktivnaja logika. *Uspehi Matematičeskih Nauk*, 5:187–188, 1950.

[9] R. Murawski. *Filozofia matematyki*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1995.

[10] D. Nelson. Constructible falsity. *The Journal of Symbolic Logic*, 14(1):16–26, 1949.

[11] A. Patterson. Bisimulation and propositional intuitionistic logic. In *Proceedings of the 8th International Conference on Concurrency Theory*, 1997.

[12] T. Połacik. Back and forth between first-order Kripke models. *Logic Journal of the IGPL*, 16(4):335–355, 2008.

[13] H. Rasiowa. N-lattices and constructive logic with strong negation. *Fundamenta Mathematicae*, 46:61–80, 1958.

[14] H. Rasiowa. *An Algebraic Approach to Non-classical Logics*. Number 78 in Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, 1974.

[15] A. S. Troelstra and D. van Dalen. *Constructivism in Mathematics. An Introduction*, volume 121,123 of *Studies in Logic*. North-Holland, 1988.

[16] A. Visser. Bisimulations, model descriptions and propositional quantifiers. Logic Group Preprint Series 161, Utrecht University, 1996.

[17] A. Visser. Submodels of Kripke models. Logic Group Preprint Series 189, Utrecht University, 1998.

[18] N.N. Vorob'ev. Constructive propositional calculus with strong negation. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 85:465–468, 1952.

Indeks